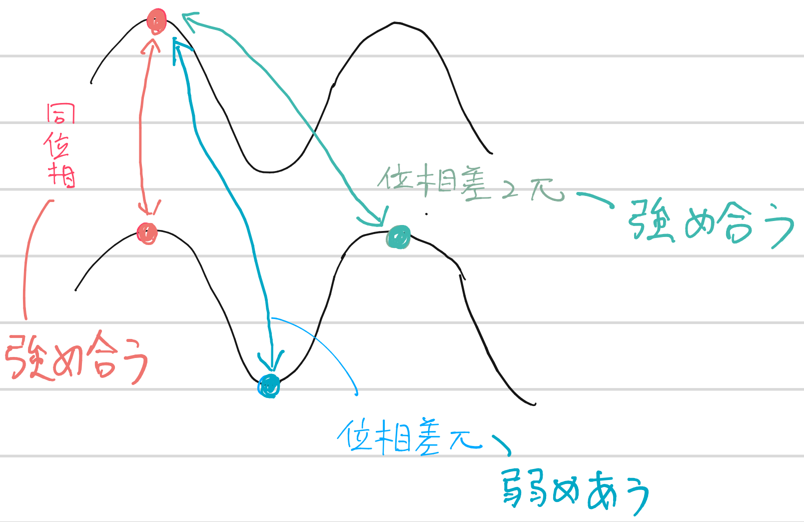
186 うなりの公式 $f = |f_1 - f_2|$

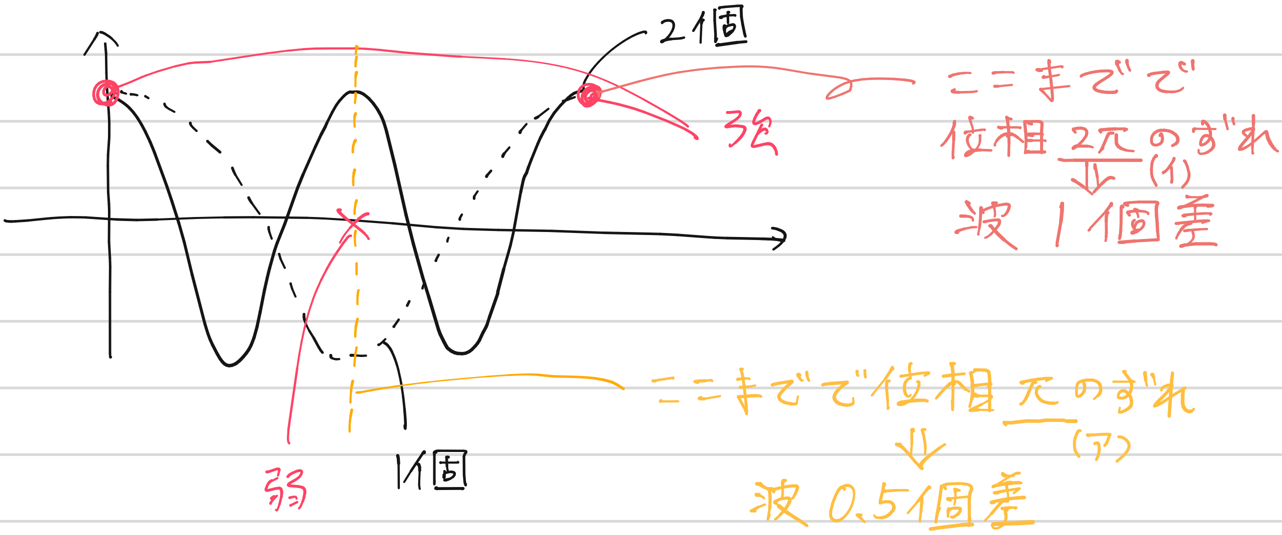
↑ つまりは 1s間に f の差だけうなりが聞こえるということ。



位相差πで弱め合い、位相差2πで強め合うと理解しよう。

うなり1回分の作図を適当な波で考えてみる

⟶ 少しずつ位相差が大きくなる



うなりが1回おこる時間で波の位相は2πずれる。

⇒ 波の個数が1個差といえる。

うなりの周期を T_f とすると、

$$\underbrace{1}_{\text{個数差 (ウ)}} = |\underbrace{f_1 T_f}_{\text{波①の個数}} - \underbrace{f_2 T_f}_{\text{波②の個数}}| = \left|f_1 \frac{1}{f} - f_2 \frac{1}{f}\right|$$

となるのだ。

187 次元

☆ 線密度 … 1m あたりの質量 ⟵ 太さや材質で変わる.

単位 : [kg/m]

☆ 次元 … 力 [N] などの単位も $ma = F$ より

$$[kg][m/s^2] = [N]$$

と複数の基本量の組み合わせでできている.

このような基本量の組み合わせを次元という.

単位		次元記号	
[m]	⟶	L	Length
[kg]	⟶	M	Mass
[s]	⟶	T	Time

これらの単位を使うときを mks 単位系という

(km や g を使うときは別の単位系となる)

$$\underset{[m/s]}{v} = k\ \underset{[N]^x}{S^x}\ \underset{[kg/m]^y}{\rho^y}$$

$ma = F$ より $[N] = [kg][m/s^2]$

$$\Rightarrow [m/s] = [kg \cdot m/s^2]^x \cdot [kg/m]^y$$

$$\Rightarrow \underline{[LT^{-1}]}_{\text{(ア)}} = \underline{[MLT^{-2}]^x}_{\text{(イ)}}\ \underline{[ML^{-1}]^y}_{\text{(ウ)}}$$

$$\Rightarrow [L][T]^{-1} = [M]^{x+y}\,[L]^{x-y}\,[T]^{-2x}$$

[L] より $1 = x - y$ … ①

[M] より $0 = x + y$ … ②

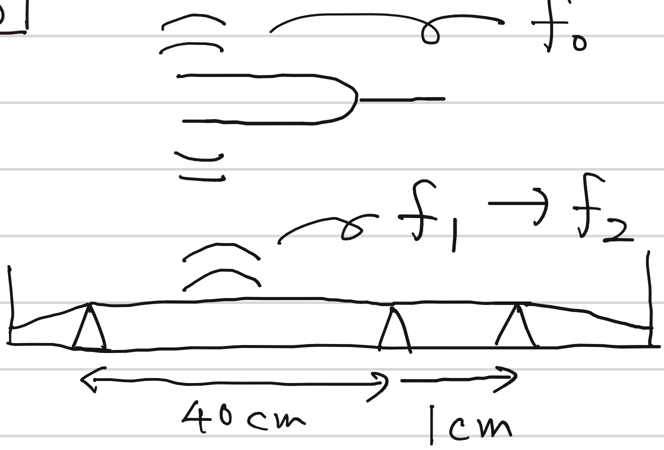
[T] より $-1 = -2x$ … ③

③ より $x = \underline{\frac{1}{2}}_{\text{(エ)}}$, ② に代入して $y = \underline{-\frac{1}{2}}_{\text{(オ)}}$

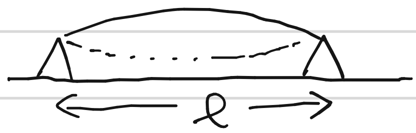
元の式 $v = kS^x\rho^y$ の x, y を代入して

$$v = k\,S^{\frac{1}{2}}\,\rho^{-\frac{1}{2}} = \underline{k\sqrt{\frac{S}{\rho}}}_{\text{(カ)}}$$

188



弦は基本振動しているので $\lambda = 2l$



$v = f\lambda$ より

$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l}$ と分かる。

弦を伸ばすと f が小さくなっていくと分かる

f_0 と f_1 でうなりが3回 ⇒ f_1 が3Hz高い or 3Hz低い

弦を伸ばすと f_1 が低くなるが、低くなることでうなりが減った。

⇒ 元々 f_1 が3Hz高く、低くなることで差がちぢまったと考えることができる。

$$\Rightarrow f_1 - 3 = f_0 \cdots ①$$

その後さらに弦を伸ばすと、うなりがなくなった後2回になった。

⇒ f_1 がどんどん低くなり、f_0 と同じになった後、さらに低くなり差が2Hzになった。

⇒ f_2 は f_0 より2Hz低いといえる。

$$\Rightarrow f_0 - 2 = f_2 \cdots ②$$

弦の基本振動の振動数は上図の説明の通り

$f = \frac{v}{2l}$ なので

$$f_1 = \frac{v}{2 \cdot 0.40} = \frac{v}{0.8} \cdots ③ \quad f_2 = \frac{v}{2 \cdot 0.41} = \frac{v}{0.82} \cdots ④$$

188 続き

① $f_1 - 3 = f_0$

② $f_0 - 2 = f_2$

③ $f_1 = \dfrac{v}{0.8}$

④ $f_2 = \dfrac{v}{0.82}$　を連立して解く.

③を変形して　　　　④を変形して

$0.8 f_1 = v$　　　　$0.82 f_2 = v$

$$0.8 f_1 = 0.82 f_2$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{0.82}{0.8} f_2 \cdots ⑤$$

①に⑤を代入して

$$\frac{0.82}{0.8} f_2 - 3 = f_0 \cdots ⑥$$

②を⑥に代入して

$$\frac{0.82}{0.8}(f_0 - 2) - 3 = f_0$$

$$\frac{0.82}{0.8} f_0 - \frac{0.82}{0.4} - 3 = f_0$$

$$\frac{0.02}{0.8} f_0 = 3 + \frac{0.82}{0.4}$$

両辺に ×0.8

$$0.02 f_0 = 2.4 + 1.64$$

両辺に ×50

$$f_0 = 120 + 82$$

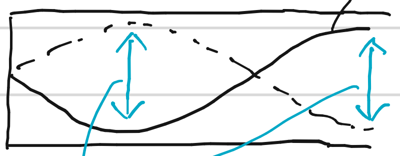
$$f_0 = \underline{202\ \mathrm{Hz}}$$

※ 模範解答の計算の方がスマートですね.

※ $v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$ と解答ではおいてますが v でよいです.

$\boxed{189}$

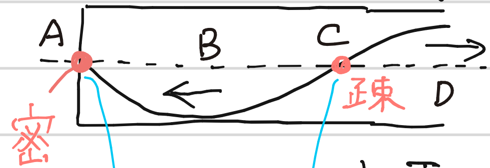
(1) 定常波



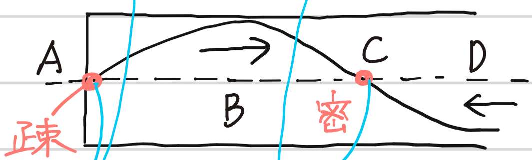
振幅最大
(振動はげしい)
⇒ (1) B, D

(2) 疎密

ある時刻の波形



↓ $\frac{T}{2}$ [s]後



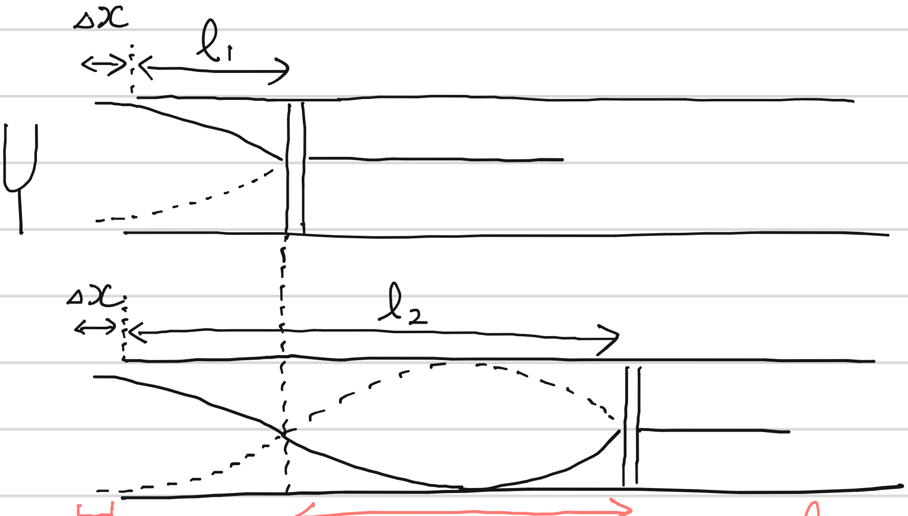
変化がはげしい
⇒ (2)(a) A, C (節)

逆に腹では
疎や密の状態にならない
ので密度変化は小さい
⇒ (2)(b) B・D (腹)

190 テーマ 気柱の共鳴

↓

開いてる口は腹、閉じている口は節の定常波を作るとき共鳴がおこる



$l_2 - l_1$ … ここの長さを使えば開口端補正を含まない分析ができる。

開口で出来る腹は、口から少し外にできる。
Δx を開口端補正という。

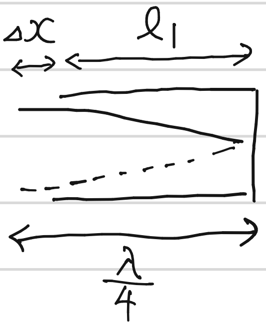
(1) 上の図より

$$\frac{\lambda}{2} = l_2 - l_1 \qquad \therefore \lambda = \underline{2(l_2 - l_1)}$$

(2) 波の式 $v = f\lambda$ より $f = \frac{v}{\lambda}$

$$f = \underline{\frac{331 + 0.6t}{2(l_2 - l_1)}}$$

(3) 上図の開口付近に注目すると



$$\Rightarrow \Delta x + l_1 = \frac{\lambda}{4}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4} - l_1 = \frac{2(l_2 - l_1)}{4} - l_1$$

$$= \underline{\frac{l_2 - 3l_1}{2}}$$

$\boxed{190}$ 続き

(4) 波の形が細かくなるのか、横長になるのかイメージしよう。

(今回)

Vup. fは不変

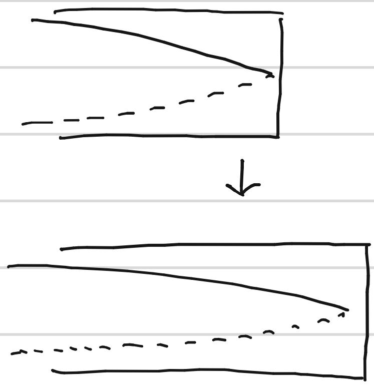
⇓

$$\underline{V}_{\text{UP}} = \underline{f}_{\text{不変}}\ \lambda$$

↑ upする!

波は横長になる

⇒



このように変化する。

よって共鳴点は<u>管口から遠ざかる</u>。//

※ 音さのだす音は、音さの重さ、材質によるので、気温によらない。
音さを変えなければ、気温があがってもfは変わらないのだ

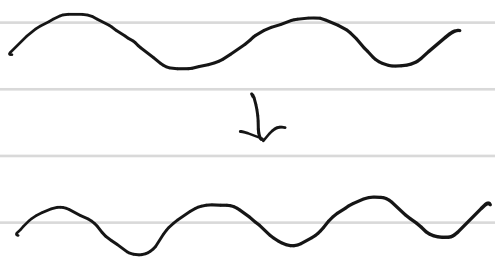
(他の例)

fを大きくし、Vは変えない

$$\underline{v}_{\text{不変}} = \underline{f}_{\text{UP}}\ \lambda$$

↑ DOWNする!

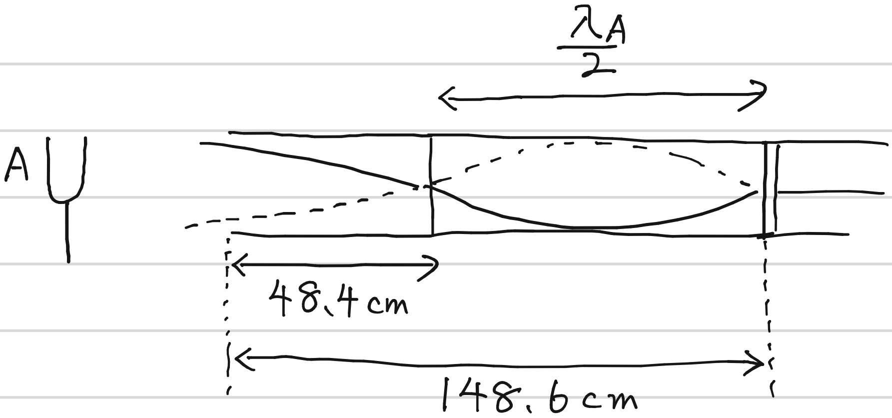
⇒



細かくなる

$\boxed{191}$

実験Ⅰ



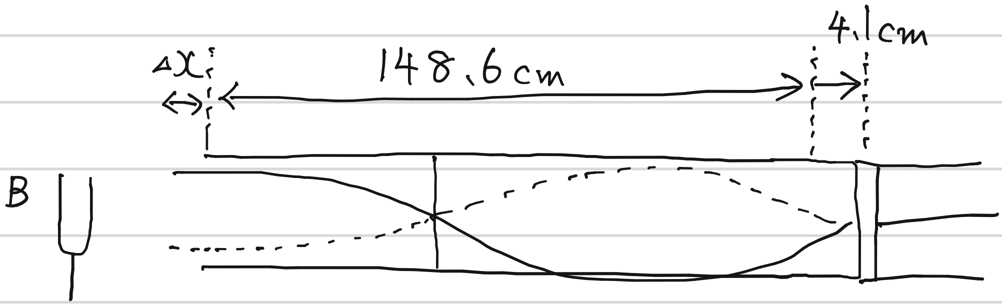
(1)　上図より

$$\frac{\lambda_A}{2} = 148.6 - 48.4$$

$$\therefore \lambda_A = 2 \times 100.2 = \underline{200.4\,\text{cm}}$$

(2)

実験Ⅱ



実験Ⅰより開口端補正Δxを求めると.

$$\Delta x + 48.4 = \frac{\lambda_A}{4}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda_A}{4} - 48.4 = \frac{200.4}{4} - 48.4 = 1.7\,\text{cm}$$

実験Ⅱの図より

$$\Delta x + 148.6 + 4.1 = \frac{3}{4}\lambda_B$$

$$\Rightarrow 1.7 + 148.6 + 4.1 = \frac{3}{4}\lambda_B$$

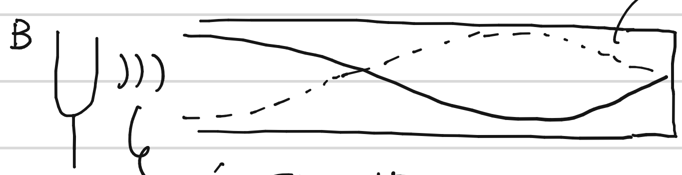
$$154.4 = \frac{3}{4}\lambda_B$$

$$\lambda_B = \frac{4}{3} \times 154.4 = 205.86\cdots \fallingdotseq \underline{205.9\,\text{cm}}$$

191 続き

(3)

実験 III



温度による変化率 α は
単位 [cm/(s・K)] を読むことで
1°C につきどれくらい音速が
変わるか、と定義されていると分かる。

それぞれの実験で波の式をたててみる

実験 I　$v = f_A \lambda_A$

実験 II　$v = f_B \lambda_B$

実験 III　$v' = f_B \lambda_B' \Rightarrow v - 15\alpha = f_B \lambda_A$

λ_A、λ_B、v で α を示すなら f を消去すればよい。
II と III の式を変形して

II：$f_B = \dfrac{v}{\lambda_B}$　　III：$f_B = \dfrac{v - 15\alpha}{\lambda_A}$

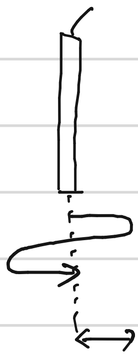
よって $\dfrac{v}{\lambda_B} = \dfrac{v - 15\alpha}{\lambda_A}$

$$\Rightarrow v\lambda_A = v\lambda_B - 15\alpha\lambda_B$$

$$\alpha = \frac{v(\lambda_B - \lambda_A)}{15\lambda_B} = \underline{\frac{v}{15}\left(1 - \frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)}$$

$\boxed{192}$

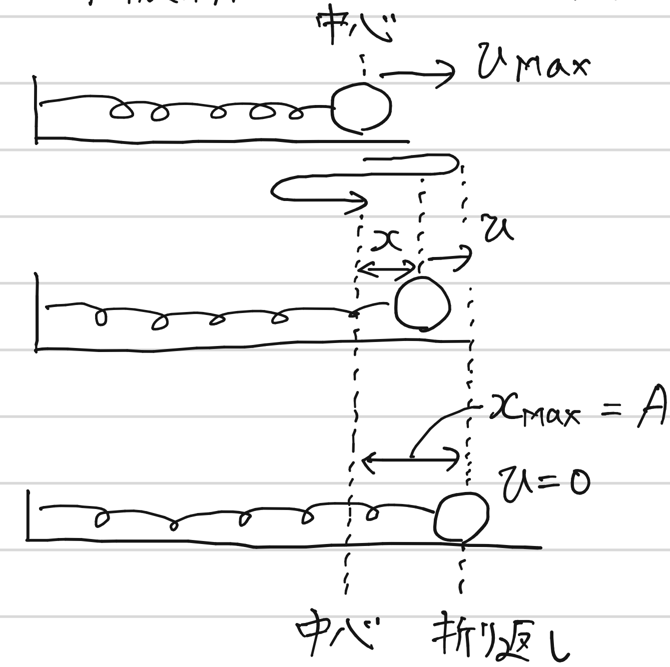
Δm の空気（密度 ρ）



この振動のエネルギーを考える.

(ア)

★単振動のときを復習する



$\Rightarrow$ エネ $\overbrace{\frac{1}{2}mv_{max}^2}^{\text{運動エネ}} + \overbrace{0}^{\text{位置エネ}}$

‖保存

$\Rightarrow$ エネ $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

‖保存

$\Rightarrow$ エネ $0 + \frac{1}{2}kA^2$

$\Downarrow$

力学エネは保存する.

これと同じように空気の持つエネルギーを考える.
空気の持つ位置エネルギーの計算式を我々は持たないが、
v_{max} の時のエネルギーを計算すれば位置エネルギーを
考えずにエネルギー総量がだせる.

$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\Delta m v_{max}^2$

ここで振動の公式 $v_{max} = A\omega$ より

$$E = \frac{1}{2}\Delta m (A\omega)^2 = \underline{\frac{1}{2}\Delta m A^2\omega^2} \quad /\!/ \text{(ア)}$$

$\boxed{192}$ 続き

(イ)　単位体積 ⇒ $1\,m^3$ のこと

密度 ρ ⇒ $1\,m^3$ あたり ρ[kg] ということ

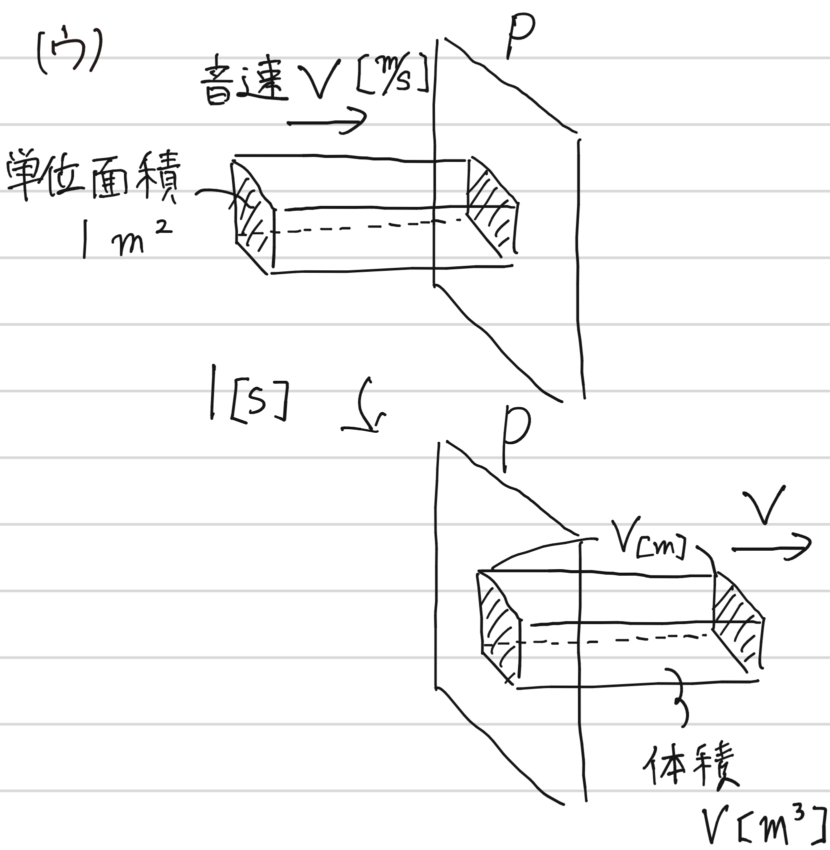
このことより 単位体積には ρ[kg] の空気があるといえる。

(ア)で Δm[kg] あたり $\frac{1}{2}\Delta m A^2 \omega^2$ [J] のエネルギーを持っていることを求めたので、これを使って ρ[kg] あたりのエネルギーをだせばよい

$$E_{単} = \underbrace{\frac{1}{2}\Delta m A^2 \omega^2}_{\Delta m\,[kg]\,あたり} \times \frac{\rho}{\Delta m} = \underbrace{\underline{\frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2}}_{\rho\,[kg]\,あたり(=単位体積あたり)} \quad // \text{(イ)}$$

※今回は単位体積あたりの質量を Δm とおいているので Δm と ρ が同じ意味の言葉になっていて、模範解答で $\Delta m = \rho$ と代入する解説がされている

(ウ)



左図のように、音速をVとすると 1s に V[m³] の空気が面Pを通過しているとわかる。

単位体積あたりは(イ)で $E_{単} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$ とだしたので 1s分は.

$\frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \times V$

$= \underline{\frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 V}$ // (ウ)

ドップラー効果

ポイント

- 公式は覚えておく

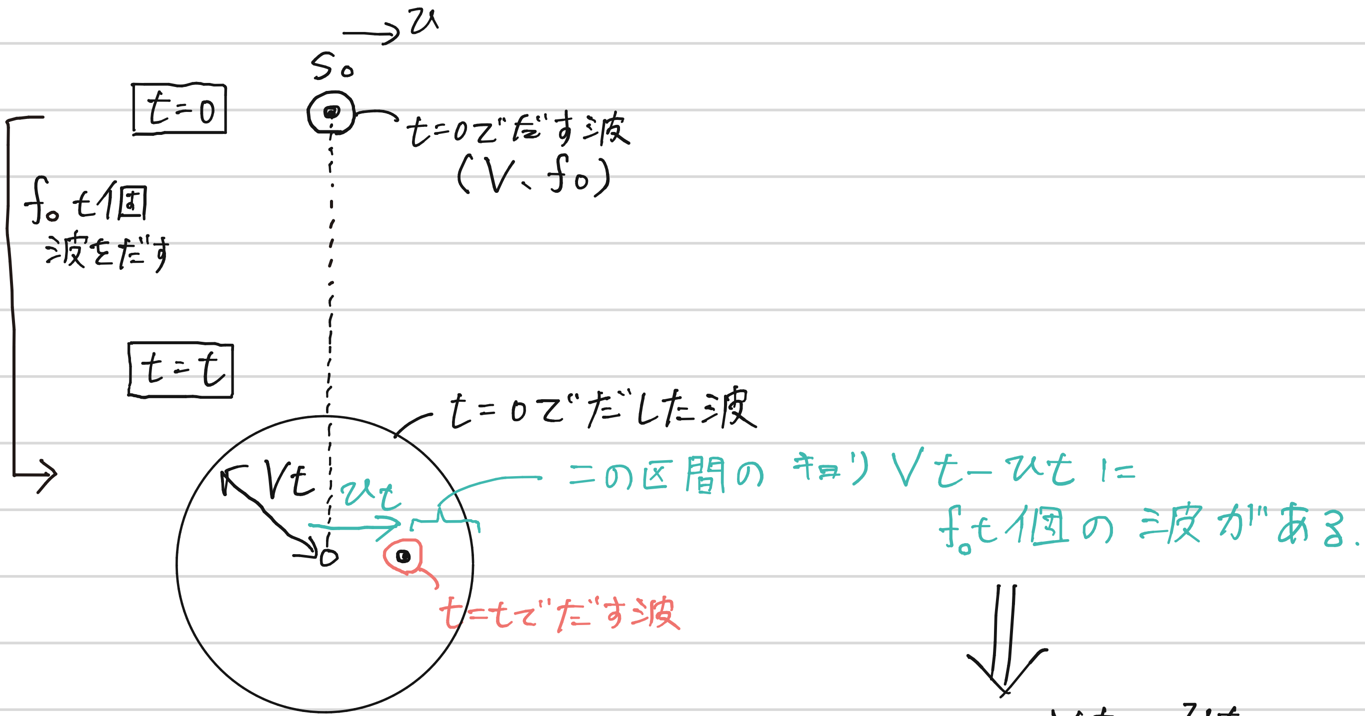
$$f = \frac{V \pm v_o}{V \pm v_s} f_0$$

ブイオー(観測者 オブザーバーの速度)

- 近づくと音は高くなり、遠ざかると音は低くなる。
- λが変わるのは 音源が動くとき
- Vは音源がうごいても変わらない

$\boxed{193}$

(1) 上からみる

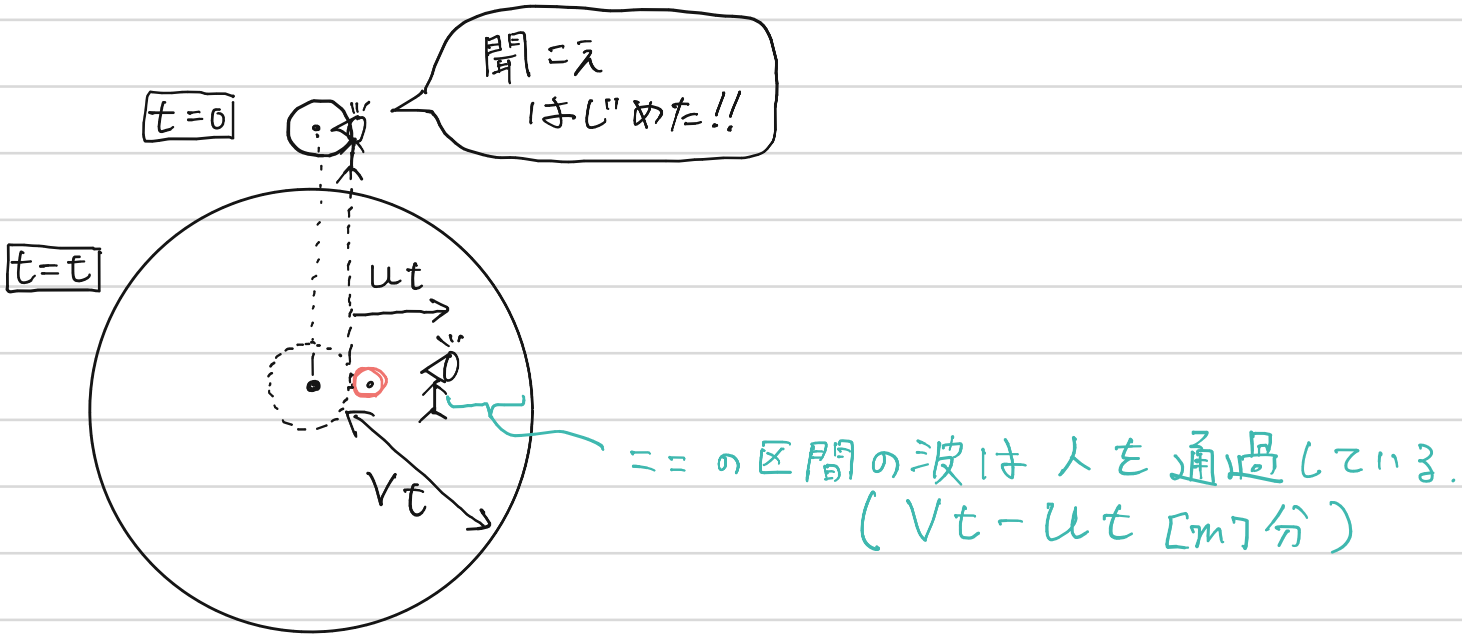


$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{Vt - vt}{f_0 t} = \frac{V - v}{f_0} \quad \text{//(ア)}$$

$\boxed{193}$ 続き

(2) 上からみる



t秒間で人が聞いた波の個数は

$$(個数) = \frac{Vt - ut}{\lambda}$$

1秒で聞いた個数がf

$$f = \frac{(個数)}{t} = \frac{\frac{Vt-ut}{\lambda}}{t}$$

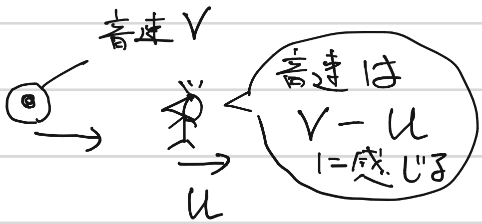
$$= \frac{V-u}{\lambda} \quad /\!/ \ (イ)$$

(1) のλを代入して

$$f = \frac{V-u}{\frac{V-v}{f}} = \frac{V-u}{V-v} f \quad /\!/ \ (ウ)$$

193 続き

※ 観測者がうごく際は「見かけの音速」の考え方も重要



⇓

波の式 $v = f\lambda$ より

$$V - u = f\lambda$$

$$f = \frac{V-u}{\lambda}$$ とかける。

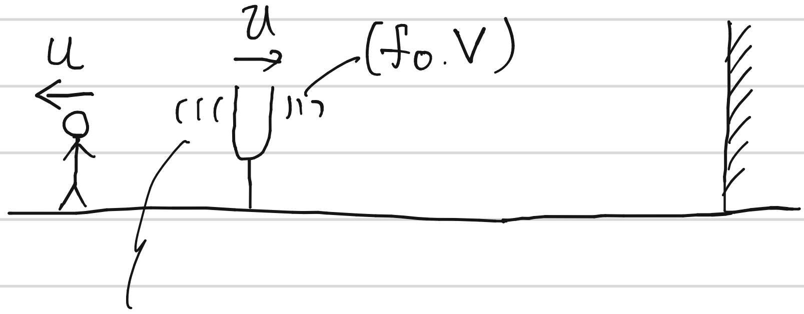
//(イ)

194 反射板

↳ 壁を観測者に見たてる

↳ 壁は聞いた音をだす音源となる

(1)



直接音 f_1

v_o も v_s も遠ざかっている。⇒どちらも

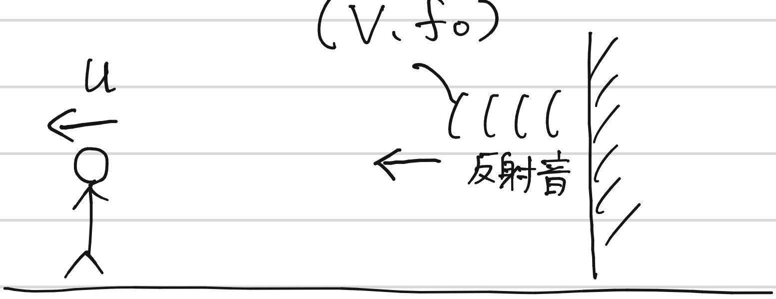
$$f_1 = \frac{V - v_o}{V + v_s} f_0 = \underline{\frac{V-u}{V+v} f_0}$$

(2) まずは壁が聞く音 f_0' を求める

音源が近づく

↳ $f_0' = \frac{V}{V - v} f_0$

→ 次に壁が f_0' をだす音源になる。



音源は静止。観測者が遠ざかる

$$f_2 = \frac{V-u}{V} f_0'$$

f_0' を代入

$$f_2 = \frac{V-u}{V} \cdot \frac{V}{V-v} f_0 = \underline{\frac{V-u}{V-v} f_0}$$

194 続き

(3) うなりは振動数の差

$$f = |f_1 - f_2|$$

今回 f_2 は近づく要素があるので

$f_2 > f_1$ なので

$$f = f_2 - f_1$$

$$= \frac{V-u}{V-v} f_0 - \frac{V-u}{V+v} f_0$$

$$= (V-u) f_0 \left(\frac{1}{V-v} - \frac{1}{V+v} \right)$$

$$= (V-u) f_0 \left\{ \frac{2v}{(V-v)(V+v)} \right\}$$

$$= \frac{V-u}{V^2 - v^2} 2v f_0$$

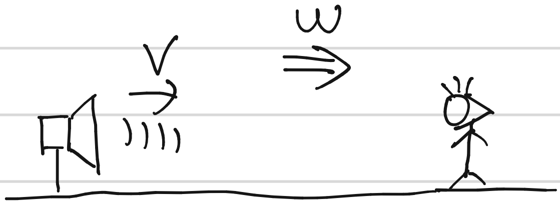
≒0と近似

$$= \frac{V\left(1-\frac{u}{V}\right)}{V^2\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)} 2v f_0$$

≒0と近似

$$\fallingdotseq \frac{V}{V^2} \cdot 2v f_0 = \frac{2v}{V} f_0$$

$\boxed{195}$ 風 → 音速Vが変化する.



音速が $V+w$ になる. // (1)

波の式 $v=f\lambda$ より

$$V+w=f\lambda$$

$$\lambda=\frac{V+w}{f}$$ // (2)

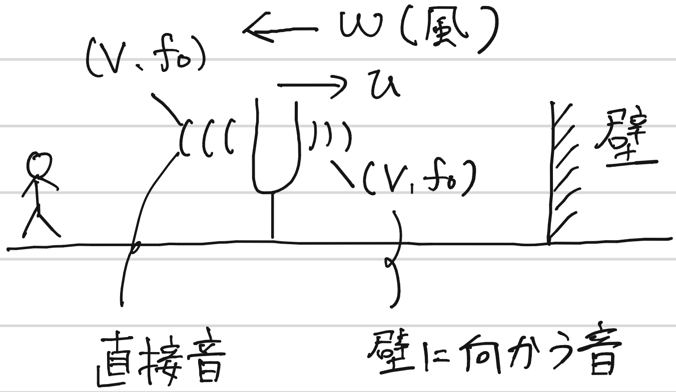
ドップラー効果の式より

$$f'=\frac{(V+w)\pm v_0}{(V+w)\pm v_s}f_0$$

$v_0=v_s=0$ なら.

$$f'=f_0$$ // (3)

196



(1) 音速が V+W に変化し、音源が遠ざかっている

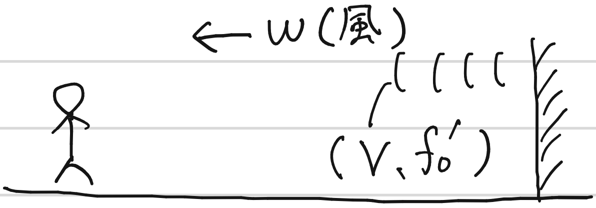
$$f_1 = \frac{(V+W)}{(V+W)+v} f_0$$

※( )は音速V' 見やすくするためにつけてるだけで不要

(2) まずは壁が聞く音 f_0' をだす。
音速が V−W に変化し、音源が近づいている。

$$f_0' = \frac{(V-W)}{(V-W)-v} f_0$$

次に壁が f_0' をだす音源となる。

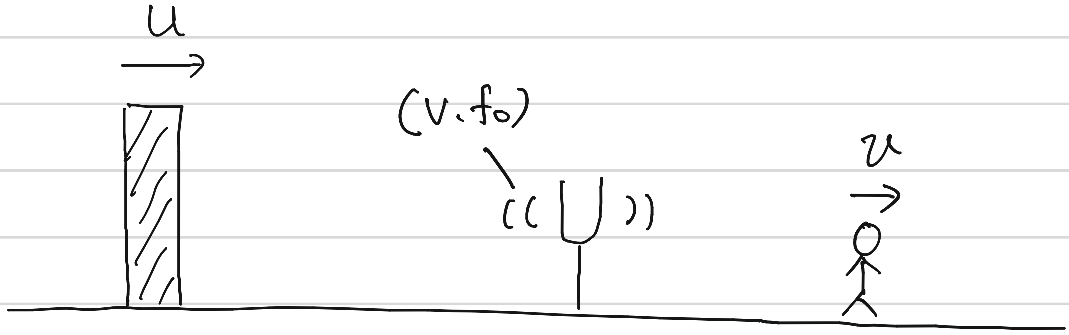


音速が V+W に変化し、音源も観測者も動かない

$$f_2 = \frac{(V+W)}{(V+W)} f_0'$$

$$= f_0' = \frac{V-W}{V-W-v} f_0$$

$\boxed{197}$

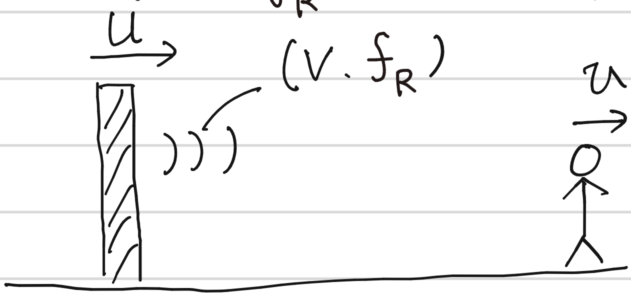


まずは壁が聞く音 f_R をだす。

観測者が u で近づく

$$f_R = \frac{V+u}{V} f_0$$

次に壁が f_R をだす音源となる



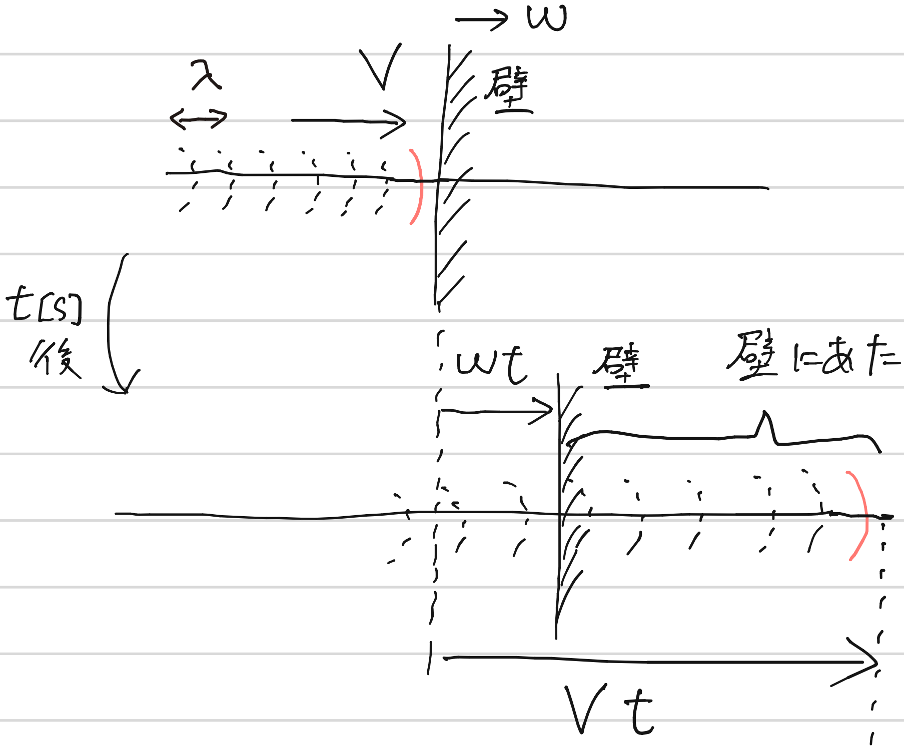
音源が u で近づき、観測者が v で遠ざかる。

$$f_{反射音} = \frac{V-v}{V-u} f_R$$

$$= \frac{V-v}{V-u} \cdot \frac{V+u}{V} f_0$$

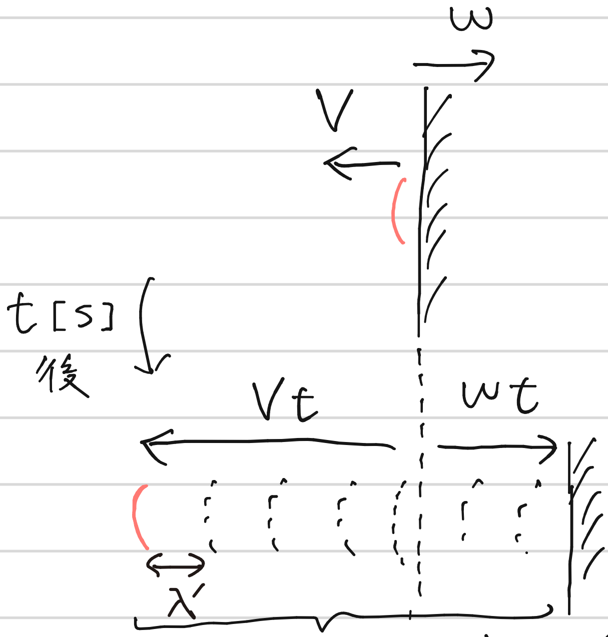
$$= \underline{\frac{(V-v)(V+u)}{(V-u)V} f_0}$$ //

198 (ア) 壁に入射する波を考える.



壁にあたる音波(n個)
長さ $\underline{Vt-wt\,[m]}$分 (ア)
||
これは $n\lambda$ と等しい

(イ) 壁から反射される波を考える.



反射した音波(n個)
長さ $\underline{Vt+wt\,[m]}$分 (イ)
||
これは $n\lambda'$ に等しい.

よって

$$\frac{n\lambda'}{n\lambda} = \frac{Vt+wt}{Vt-wt} \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{V+w}{V-w}$$

このように式が導ける

$\boxed{198}$ 続き

$\boxed{補足}$ 問題文前半でドップラー効果で式をだしたとあるので
やってみる

◦ 入射波の波長は λのまま $\Rightarrow V = f_0 \lambda$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{V}{f_0}$$

◦ 壁による反射波の f をだしてみる.

まずは壁を観測者とする

$$f_0' = \frac{V-w}{V} f_0 \longleftarrow$$ 壁が聞く音 (観測者が遠ざかる)

次に壁が f_0' をだす音源とみなす.

$$f' = \frac{V}{V+w} f_0' \longleftarrow$$ 壁が出す音 (音源が遠ざかる)

$$= \frac{V}{V+w} \cdot \frac{V-w}{V} f_0 = \frac{V-w}{V+w} f_0$$

これと

$V = f\lambda$ より

$V = f''\lambda'$

$$\lambda' = \frac{V}{f''} = \frac{V}{\frac{V-w}{V+w} f_0} = \frac{(V+w)V}{(V-w)f_0}$$

よって

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\frac{(V+w)V}{(V-w)f_0}}{\frac{V}{f_0}} = \frac{V+w}{V-w}$$

このようにドップラー効果でも式が導ける.