199

状態方程式より

$$PV = nRT \cdots ①$$

(1) 全体の質量が ρV [kg] で M [kg] あたりが 1 mol なので

$$n = \underline{\underline{\frac{\rho V}{M}}} \cdots ② \text{(ア)}$$

① に ② を代入して

$$PV = \frac{\rho V}{M} RT$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho T} = \underline{\underline{\frac{R}{M}}} = \text{一定}.\ \text{(イ)}$$

(R も M も一定なので)

(2) 前問(1)より

$$\frac{P}{\rho T} = \text{一定}$$

なので. 気体の状態が変化したとき、

$$\frac{P}{\rho T} = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \cdots ③$$

が成立する。
問題文の音速の式

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$$

に代入できるよう ③ を変形すると

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0} \frac{T}{T_0}$$

となり、代入すると

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \frac{T}{T_0}} \cdots ④$$

199 (2) 続き

一方で $T_0 = 0^\circ C$ のときの音速 v_0 が $v_0 = 331$ m/s なので

$$v_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow 331 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \quad \cdots ⑤$$

となる。

④に⑤と、$T_0 = 273 [K]$, $T = T_0 + t = 273 + t [K]$ を代入して

$$v = 331 \sqrt{\frac{273+t}{273}}$$

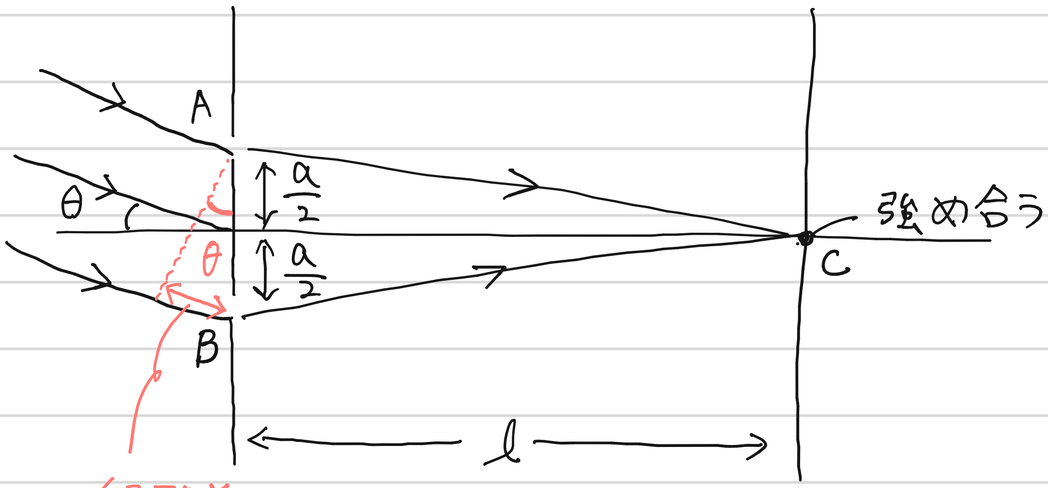
$$= 331 \left(1 + \frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq 331 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{273}\right) \quad \left(\because 1 \gg \frac{t}{273}\right)$$

$$= 331 + \frac{331}{2 \cdot 273} t$$

$$\fallingdotseq 331 + 0.6 t$$

$\boxed{200}$ ヤングの干渉と同様の実験である.



(1) 干渉の条件は

$\boxed{\text{強め合う}}$

(経路差) = (半波長) × (偶数)

経路差が位相 2π分で同位相で重なってる

ということ.

$$\Rightarrow \quad a\sin\theta_n = \frac{\lambda}{2} \times 2n \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

$$\Rightarrow \quad a\sin\theta_n = n\lambda$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = \frac{a\sin\theta_n}{n} \quad /\!/ \ (ア)$$

ここで

$0 < \theta < 90°$ なので

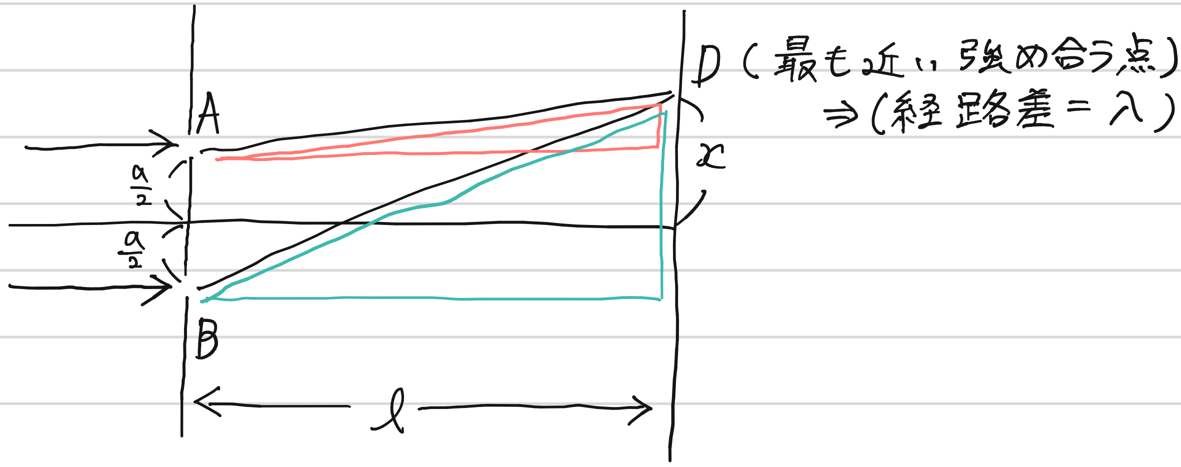
$$\frac{a\sin 0°}{n} < \lambda < \frac{a\sin 90°}{n}$$

$$0 < \lambda < \frac{a}{n}$$

$$\therefore \ 0 < n < \frac{a}{\lambda} \quad /\!/ \ (イ)$$

$\boxed{200}$ 続き

(2)



(ウ) 経路差は $\overline{BD}-\overline{AD}$ で求まり，これが λ なので

$$\lambda = \overline{BD}-\overline{AD}$$

$$= \sqrt{l^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2} \quad \cdots (ウ)$$


の三平方


の三平方

(エ) $\overline{BD}$ について

$$\overline{BD} = \sqrt{l^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}$$

$\sqrt{1+a}$ の形を目指し，$\sqrt{l^2}$ を外にだす

$$= l\sqrt{1+\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{l^2}}$$

問題文にある近似を行う.

$$= l\left\{1+\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{l^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq l\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{l^2}\right\}$$

$$= l + \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{2l}$$

$\boxed{200}$ (2) 続き

同様に $\overline{AD}$ を近似して

$$\overline{AD} = \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$
$$\fallingdotseq l + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2l}$$

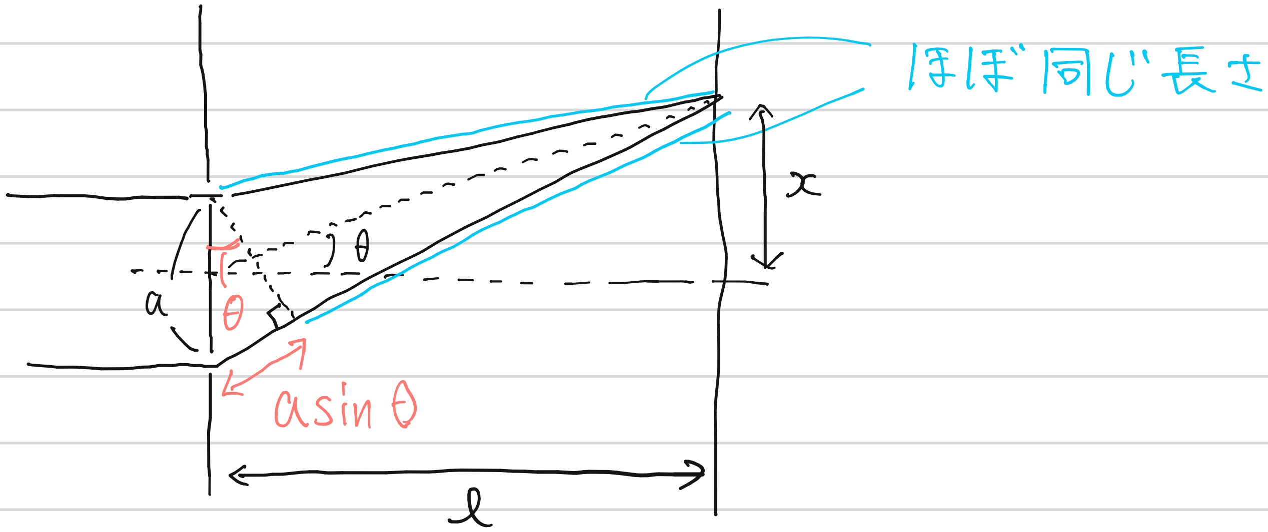
(ハ)の式に代入して

$$\lambda = \overline{BD} - \overline{AD}$$
$$= l + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2l} - \left\{ l + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2} \right\}$$
$$= \underline{\frac{a}{l} x}$$

(エ)

ヤングの実験と同じ
現象が音波でも起こるのだ

$\boxed{\text{別解}}$ (エ) 経路差は下図の $a\sin\theta$ の部分ともいえる.



ここで $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$ と近似すると.

$$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta = \frac{x}{l}$$

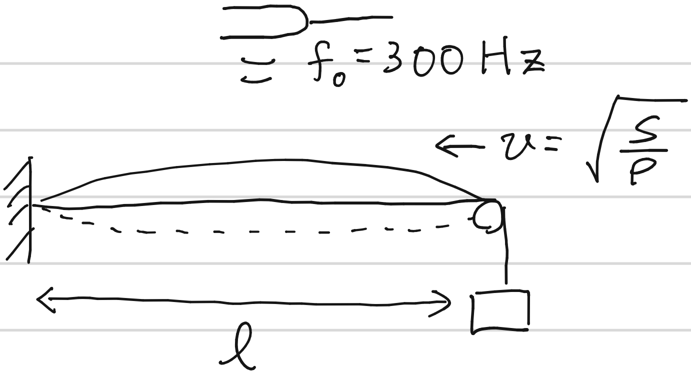
となるので経路差は

$$(\text{経路差}) = a\sin\theta = \underline{\frac{a}{l} x}$$

(エ)

201

$f_0 = 300\,\mathrm{Hz}$



$\lambda = 2l$ であり　$v = f\lambda$ なので

$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$ （← 問題文にある式を導いた。）

(1)　おもりの重さをふやす ⇒ S を 2% 増やす

$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{S}{\rho}} \Rightarrow f' = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{1.02S}{\rho}}$ と変化する

$\frac{f'}{f} = \frac{\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{1.02S}{\rho}}}{\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}} = \sqrt{1.02} = (1+0.02)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq (1+\frac{1}{2}\times 0.02)$

$= 1+0.01$

⇒ $\underline{1\%\text{増加}}$ といえる

$(1+0.02)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\cdot 0.02$ の近似について

$a \ll 1$ のとき

$(1+a)^n \fallingdotseq 1+na$ とできる近似を使っている。

(例)　$(1+0.01)^2 = 1+\underbrace{2\times 0.01}_{na} + \underbrace{0.01^2}_{\fallingdotseq 0}$

小×小 ＝極小 なのだ

$\boxed{201}$ 続き

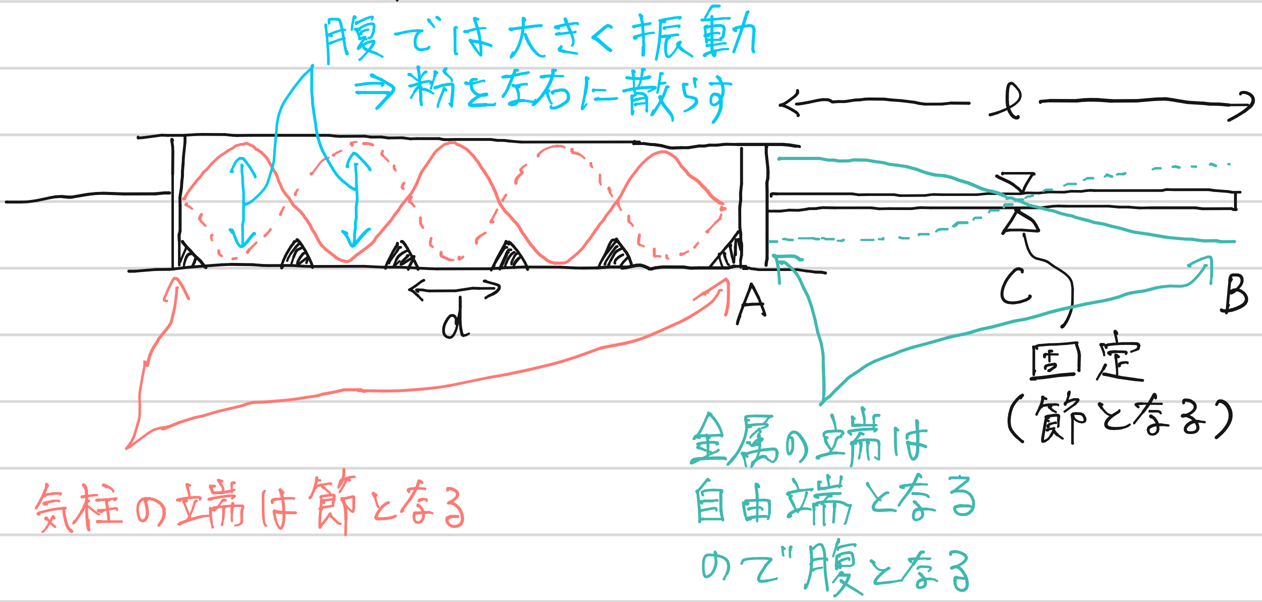
(2)(3) 初め　うなりが2回
⇒ 298Hz か 302Hz

後　うなりが5回
⇒ 295Hz か 305Hz

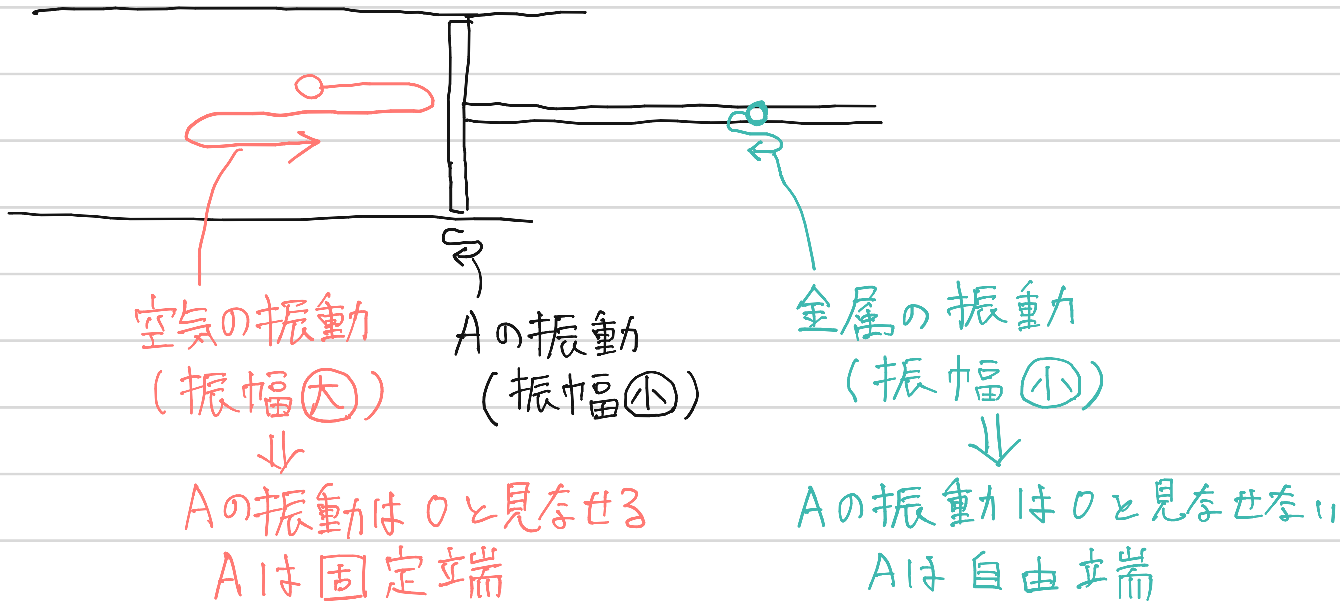
fは増加するはずなので
298Hz → 305Hz
か
302Hz → 305Hz
のどちらかのパターンとなる

fが1%(約3Hz)増えるのは
$\underbrace{302\,\mathrm{Hz}}_{(3)} \to \underbrace{305\,\mathrm{Hz}}_{(2)}$ の方である

202 クントの実験

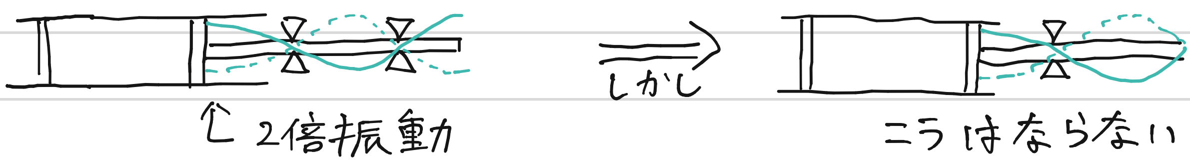


☆ Aで気柱側は節となり、金属棒側が腹になっているのは？



※ 縦波なので振動の向きは図の左右方向である。

※ 金属の固定位置をかえることで下図のように
振動することもありえる。



$\boxed{202}$ 続き

(1) 図から気柱内の波の波長$\lambda_{空}$は

$$\frac{\lambda_{空}}{2} = d \qquad \therefore \lambda_{空} = \underline{2d}$$

(2) $v = f\lambda$より

$$V = f_{空} \cdot 2d$$

$$\therefore f_{空} = \frac{V}{2d}$$

(3) 図から金属棒の波の波長$\lambda_{棒}$は

$$\frac{\lambda_{棒}}{2} = l \qquad \therefore \lambda_{棒} = 2l$$

(4) $v = f\lambda$より

$$v = f_{棒} \cdot 2l$$

$f_{棒} = f_{空}$なので

$$v = f_{空} \cdot 2l$$

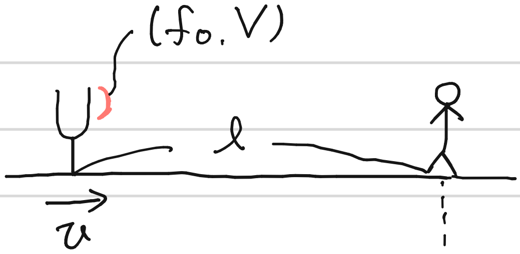
$$v = \frac{V}{2d} \cdot 2l$$

$$\therefore v = \underline{\frac{l}{d} V}$$

203

(1)

$\boxed{t=0}$



(1)

)が人に到達するまでの時間は $\frac{l}{V}$ [s]

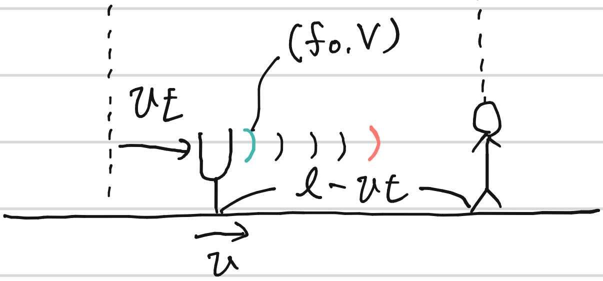
よって

時刻 $t_1 = 0 + \frac{l}{V} = \underline{\frac{l}{V}}_{//}$ (ア)

※ 音速 V は音源がうごいても変わらないことに注意

(2)

$\boxed{t=t}$



(2)

)が人に到達するまでの時間は $\frac{l-vt}{V}$ [s]

よって

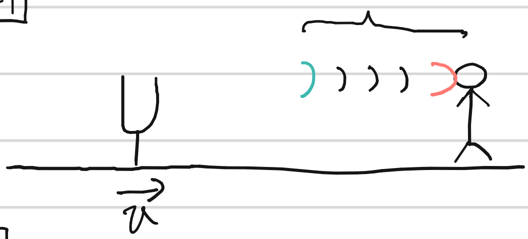
時刻 $t_2 = \underline{t + \frac{l-vt}{V}}_{//}$ (イ)

(3)

$\boxed{t=t_1}$

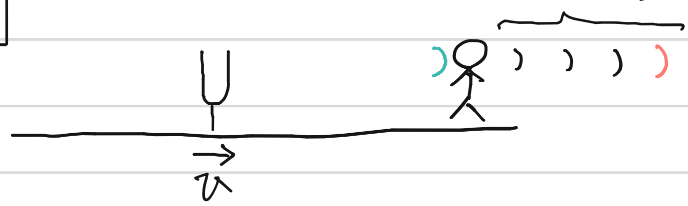
) と) の音をだしたタイミングは t [s] 差

⇒ $f_0 t$ 個 波がある.



$\boxed{t=t_2}$

人が $(t_2 - t_1)$ [s] で聞く波



$\underline{f_0 t \text{個}}_{//}$ (ウ)

1s に聞く波の個数を計算すると

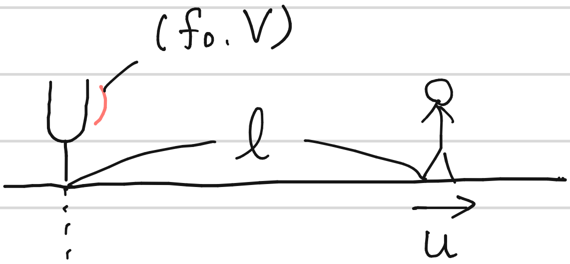
$$f = (1s\text{に聞く個数}) = \frac{f_0 t}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{f_0 t}{t + \frac{l-vt}{V} - \frac{l}{V}} = \frac{V f_0 t}{Vt + l - vt - l}$$

$$= \underline{\frac{V}{V-v} f_0}_{//} \ (エ)$$

$\boxed{204}$

(1)



$\boxed{t=0}$

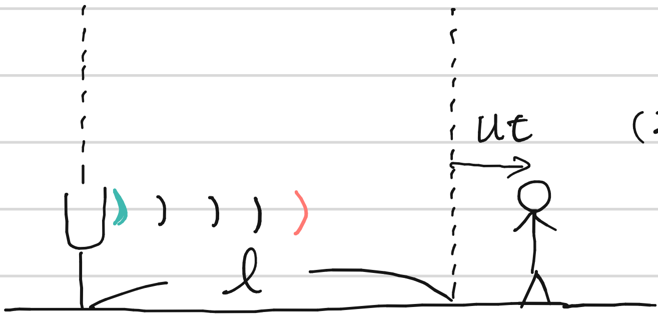
(1)) が人に到達するまでの

時間は $\dfrac{\ell}{V-u}$ [s] ←相対速度を利用

よって

時刻 $t_1 = 0 + \dfrac{\ell}{V-u} = \dfrac{\ell}{V-u}$ (ア)

(2)



$\boxed{t=t}$

(2)) が人に到達するまでの

時間は $\dfrac{\ell+ut}{V-u}$

よって

時刻 $t_2 = t + \dfrac{\ell+ut}{V-u}$

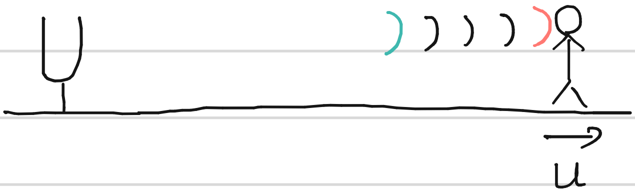
$= \dfrac{Vt+\ell}{V-u}$ (イ)

(3)

) と) の音をだしたタイミングは t [s] 差

⇒ $f_0 t$個 波がある.

$\boxed{t=t_1}$



人が(t_2-t_1)の間に聞く波

$f_0 t$個

$\boxed{t=t_2}$

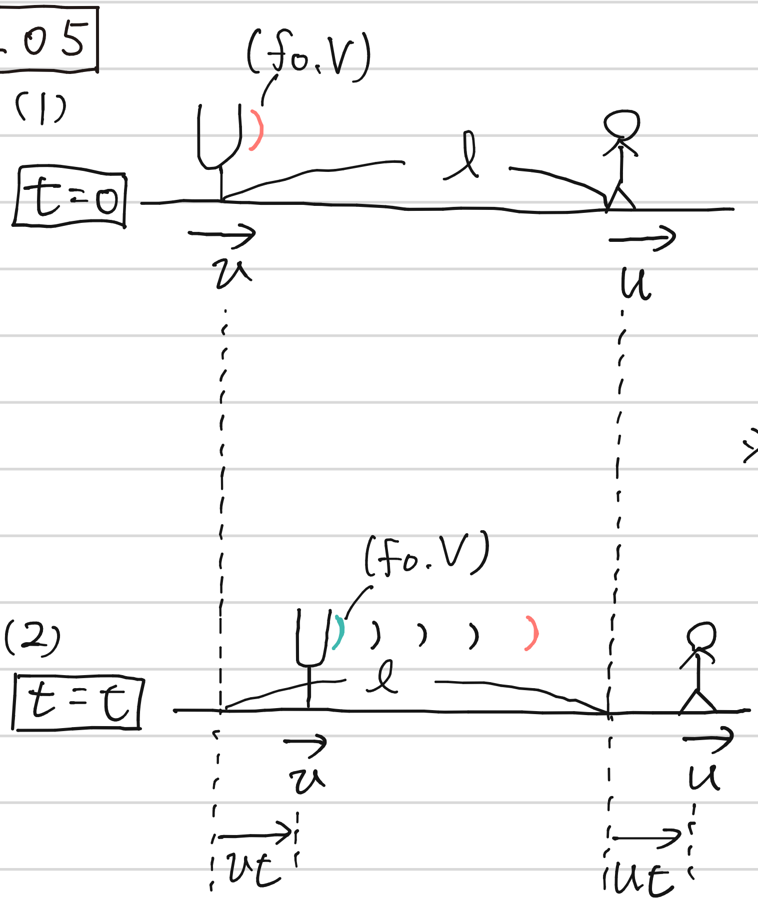
$$f = (1\,\mathrm{s}\text{に聞く個数}) = \frac{f_0 t}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{f_0 t}{\dfrac{Vt+\ell}{V-u} - \dfrac{\ell}{V-u}} = \frac{f_0 t(V-u)}{Vt}$$

※ t_1, t_2を相対速度を利用して
だしたので 付属の解説と式が
ちがってしまいました。

$$= \frac{V-u}{V} f_0$$ (ウ)

205



(1)) が人に到達するまでの時間は $\dfrac{l}{V-u}$ [S] ← 相対速度を利用

よって時刻 $t_1 = 0 + \dfrac{l}{V-u} = \underline{\dfrac{l}{V-u}}$ // (ア)

※ 音源の速度 v は、音速 V を変えないので注意。

(2)) が人に到達するまでの時間は $\dfrac{l+ut-vt}{V-u}$

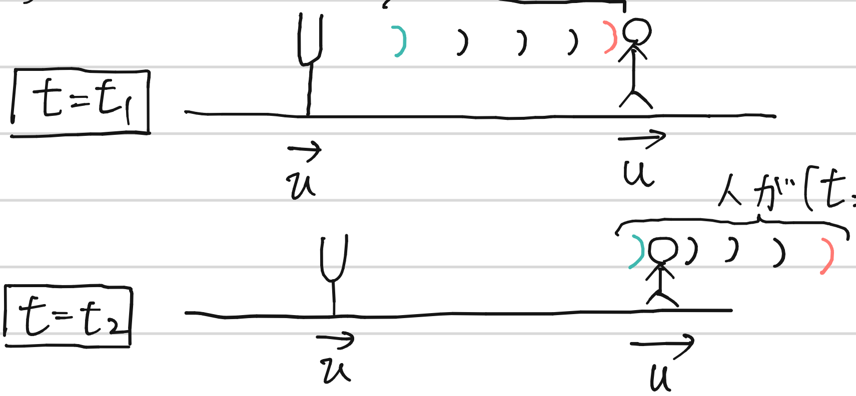
よって時刻 $t_2 = t + \dfrac{l+ut-vt}{V-u}$

$= \underline{\dfrac{l+Vt-vt}{V-u}}$ // (イ)

(3)

) と) の音をだしたタイミングは t [S] 差

⇒ f_0t 個波がある.



人が (t_2-t_1) の間に聞く波 f_0t 個

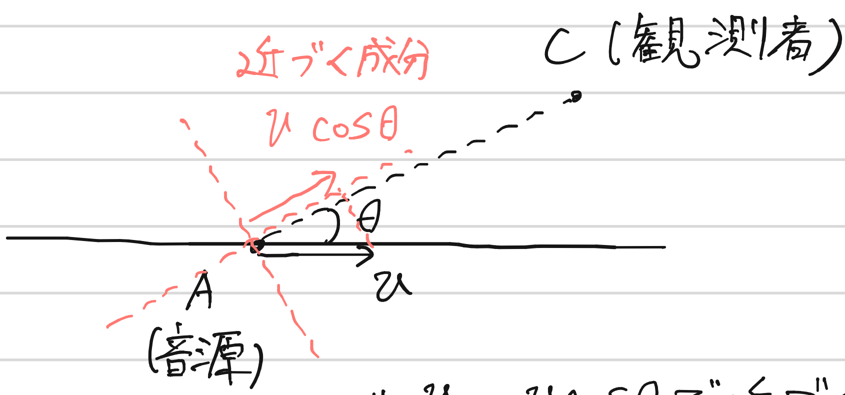
$$f = (1\text{s} に聞く個数) = \frac{f_0t}{t_2-t_1}$$

$$= \frac{f_0t}{\dfrac{l+Vt-vt}{V-u} - \dfrac{l}{V-u}}$$

$$= \frac{f_0t(V-u)}{Vt-vt} = \underline{\frac{V-u}{V-v}f_0}$$ // (ウ)

$\boxed{206}$ 斜めドップラー

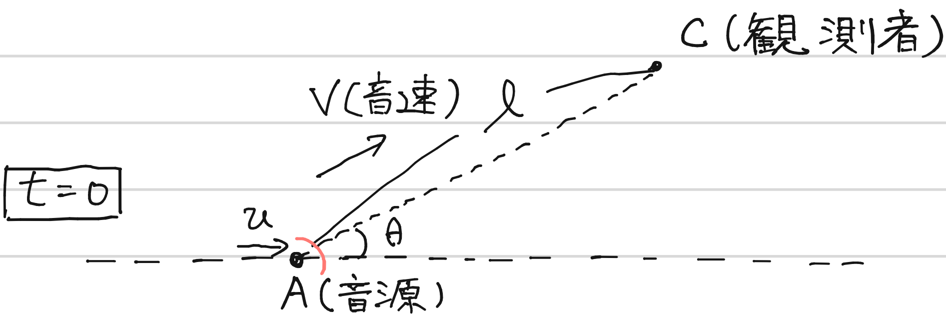
※ fをだすだけなら、音源と観測者に軸をとる

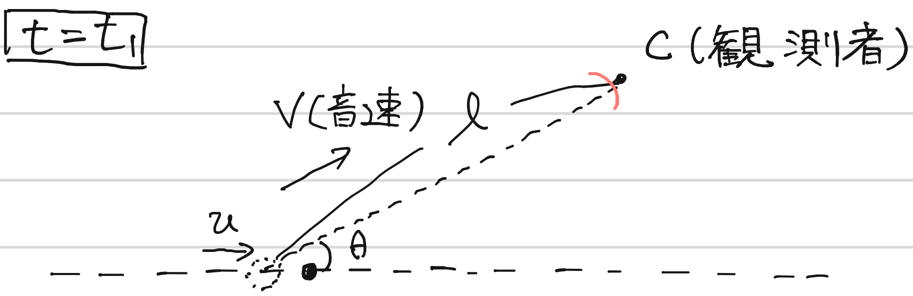


$\Downarrow$ $v_s = v\cos\theta$ で近づく

$$f' = \underline{\frac{V}{V - v\cos\theta} f_0}$$

このようになる理由を考える問題である





）が C に到達するまでの時間は

$\dfrac{\ell}{V}$ [s]

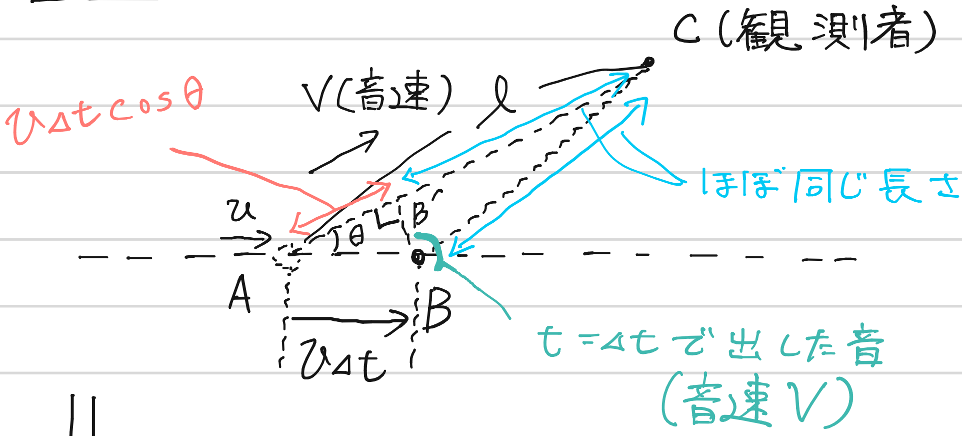
よって

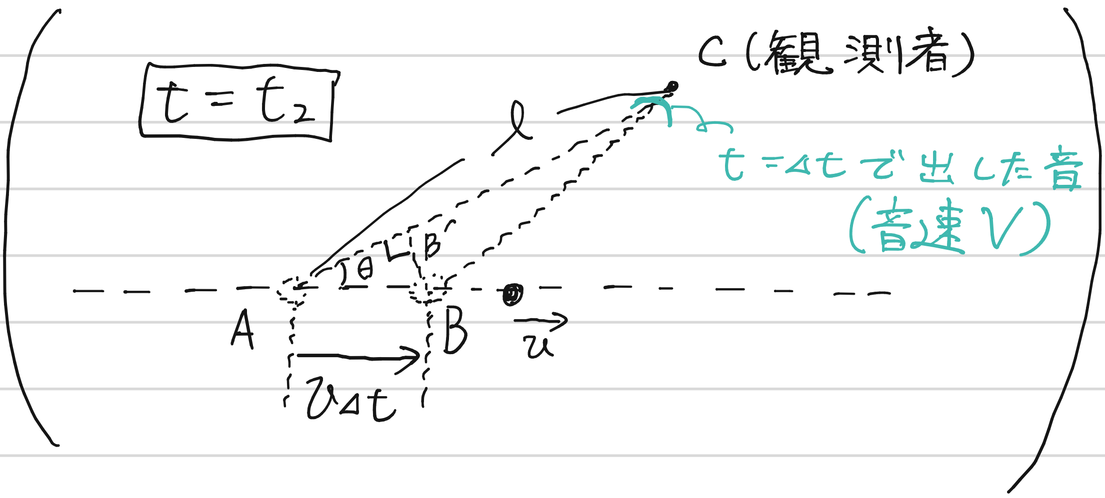
$$t_1 = 0 + \frac{\ell}{V} = \underline{\frac{\ell}{V}\,[s]}$$

（ア）

$\boxed{206}$ 続き

(2) $\boxed{t=\Delta t}$





上図のように書けて

$$\overline{BC} \fallingdotseq \overline{B'C} = l - v\Delta t\cos\theta$$

となる.

よって) の波が C に届くまでの時間は

$$\frac{\overline{BC}}{V} \fallingdotseq \frac{l - v\Delta t\cos\theta}{V}$$

よって) の波が C に届いた時刻 t_2 は

$$t_2 = \Delta t + \frac{l - v\Delta t\cos\theta}{V}$$

(イ)の式

$\boxed{206}$ 続き

(3) (1)の) の波と(2)の) の波は Δt [s] 間にだされた波の始めと終わりなので) と) の間には $f_0 \Delta t$ 個波があるといえる。

そして、観測者は t_1 から t_2 の間に) から) の波を聞いているので $(t_2 - t_1)$ 秒に $f_0 \Delta t$ 個の波を聞いたといえる。

よって

$$f = (1\text{s に聞く個数}) = \frac{f_0 \Delta t}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{f_0 \Delta t}{\Delta t + \frac{l - v\Delta t\cos\theta}{V} - \frac{l}{V}}$$

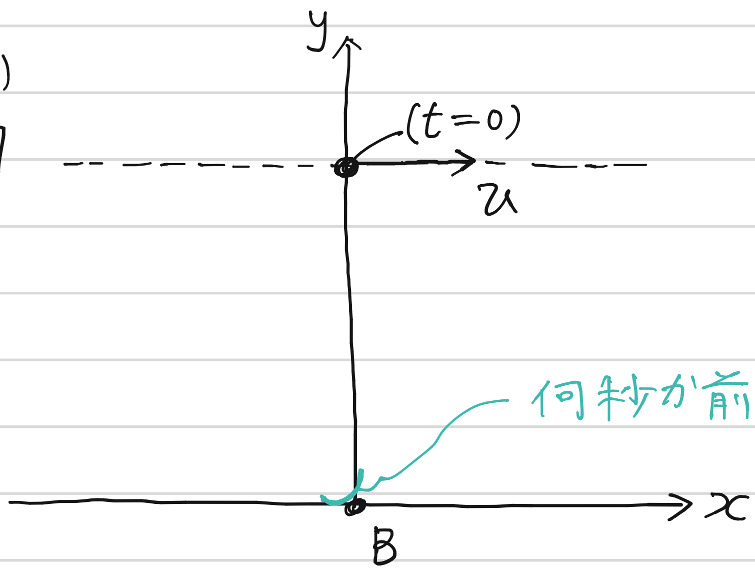
$$= \frac{f_0 V \Delta t}{V\Delta t + l - v\Delta t\cos\theta - l}$$

$$= \underline{\frac{V}{V - v\cos\theta} f_0} \quad // \text{(ウ)}$$

$\boxed{207}$

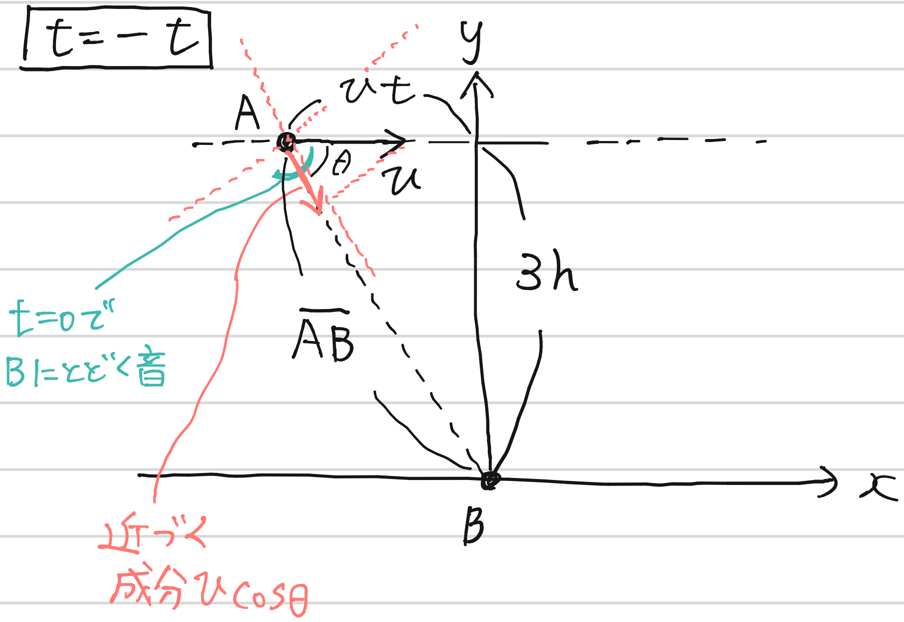
(1)

$\boxed{t=0}$



⇓

$\boxed{t=-t}$



t [s] で音波が B にとどくことから

$$\overline{AB} = Vt$$

となり、図形的に

$$\cos\theta = \frac{\upsilon t}{\overline{AB}} = \frac{\upsilon t}{Vt} = \frac{\upsilon}{V}$$

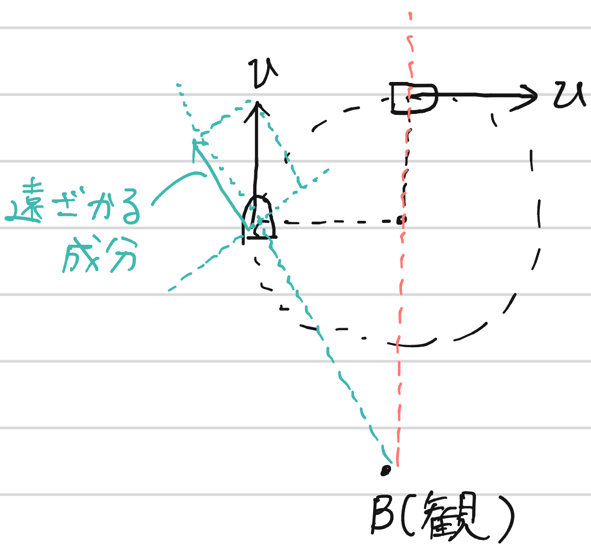
となる.

ドップラー効果の式をたてると

$$f = \frac{V}{V-\upsilon\cos\theta} f_0 = \frac{V}{V-\upsilon\cdot\frac{\upsilon}{V}} f_0 = \underline{\underline{\frac{V^2}{V^2-\upsilon^2} f_0}}$$

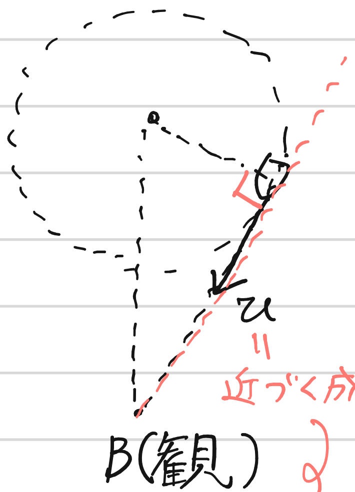
$\boxed{207}$ 続き

(2)　斜めドップラーで円運動時を考える



近づく成分0
(ドップラー効果はおきない)

最大となるときを考える

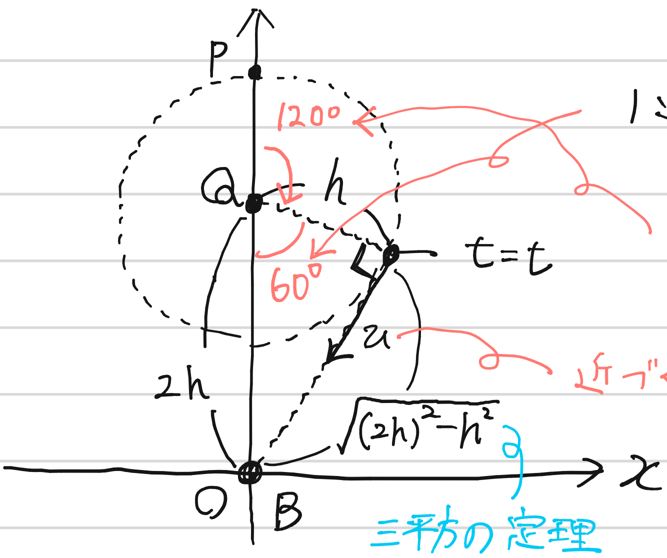


v = 近づく成分

vが分解されていないのでこのとき最大
(接線が直接Bに向かう点で最大となる)

$\boxed{207}$ 続き

今回のモデルを書くと



1:2:$\sqrt{3}$ の直角三角形なので60°
よって
点Pから120°回転したときに最大となる。

円運動の周期をTとすると120°回転するまでの時間tは

$$t=\frac{T}{3}$$

円運動の周期Tは

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi h}{v}$$

2式より

$$t=\frac{\frac{2\pi h}{v}}{3}=\frac{2\pi h}{3v}$$

…ドップラー効果でfが最も大きくなる音が発射される時刻。

ここから観測者に音が届くまでの時間Δtは

$$\Delta t=\frac{(キョリ)}{(音速)}=\frac{\sqrt{(2h)^2-h^2}}{V}=\frac{\sqrt{3}h}{V}$$

よって音が聞こえる時刻は

$$t+\Delta t=\frac{2\pi h}{3v}+\frac{\sqrt{3}h}{V}$$

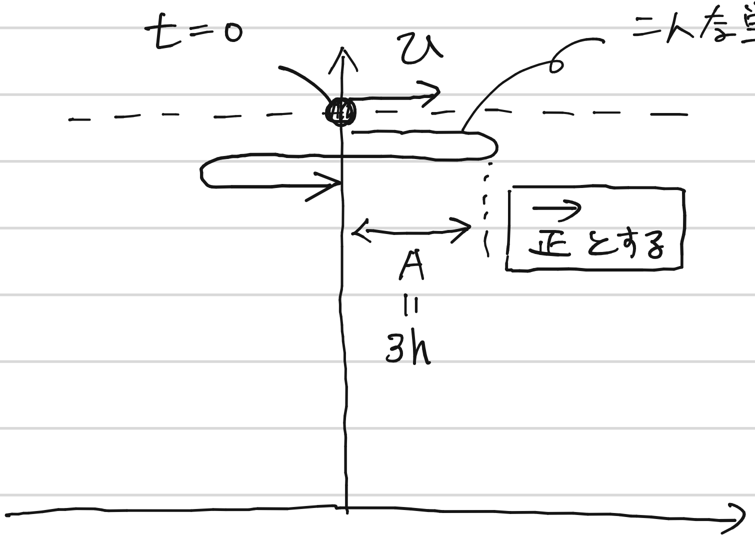
$$=\underline{\left(\frac{2\pi}{3v}+\frac{\sqrt{3}}{V}\right)h}_{//}$$

207 (2) 続き

このとき、音源がひで近づくドップラー効果がおきているので、聞こえる音の振動数は

$$f' = \frac{V}{V - v} f_0$$

(3)



P通過時をt=0としたら、

x は $\boxed{+\sin型}$ といえ

$x_{(t)} = A \sin \omega t$

$x_{(t)} = 3h \sin \omega t$

ひは $\boxed{+\cos型}$ といえ

$v_{(t)} = A\omega \cos \omega t$

ひの最大値は $A\omega$

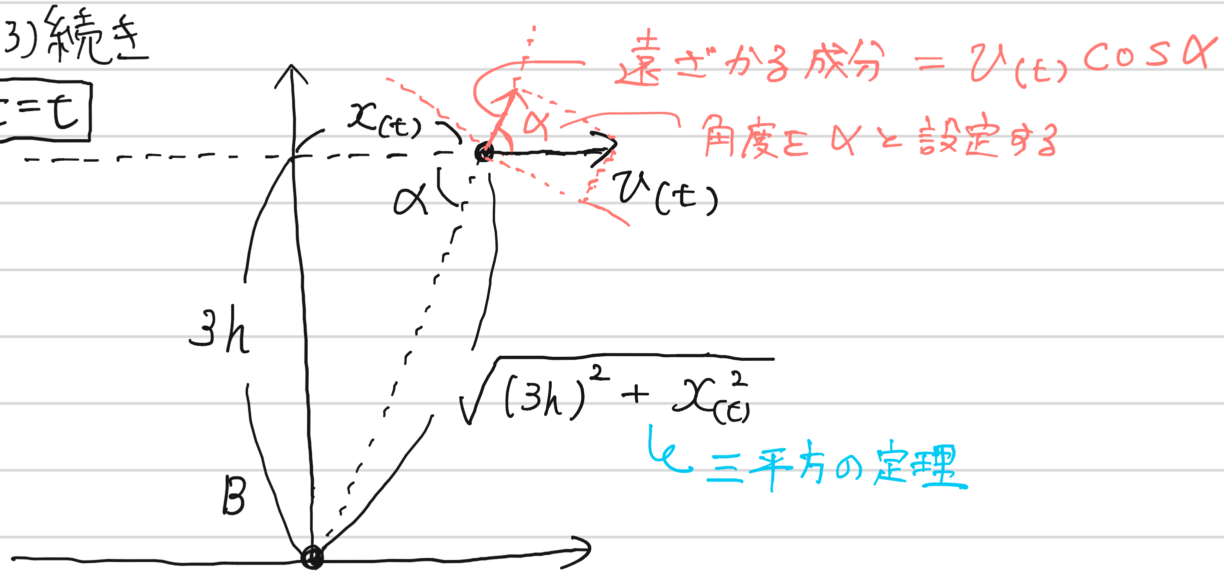
$v_{(t)} = 3h\omega \cos \omega t$

このように式にできる

適当な時刻tでの作図をする。
ここで変数である $x_{(t)}$ と $v_{(t)}$ が正の値をとるときを書くようにすることで、値がマイナスになるときは、符合が勝手に逆になる、という立式ができる。

$\boxed{207}$ (3)続き

$\boxed{t=t}$



(時刻について)

$t=t$ で発した音が B に届くまでの時間 Δt は

$$\Delta t = \frac{(\text{きょり})}{(\text{音速})} = \frac{\sqrt{(3h)^2+x_{(t)}^2}}{V}$$

$$= \frac{\sqrt{(3h)^2+(3h\sin\omega t)^2}}{V}$$

$$= \frac{3h\sqrt{1+\sin^2\omega t}}{V}$$

よって音が B に届く時刻は

$$t+\Delta t = \underline{t + \frac{3h\sqrt{1+\sin^2\omega t}}{V}} \;/\!/$$

(振動数について)

$v_{(t)}\cos\alpha$ で音源が遠ざかるドップラー効果であるので

$$f' = \frac{V}{V+v_{(t)}\cos\alpha} f_0$$

$v_{(t)}$ を代入

$$f' = \frac{V}{V+3h\omega\cos\omega t\cdot\cos\alpha} f_0$$

ここで図形的に

$$\cos\alpha = \frac{x_{(t)}}{\sqrt{(3h)^2+x_{(t)}^2}}$$

$\boxed{207}$ (3) 続き

$x(t)$を代入

$$\cos\alpha = \frac{3h\sin\omega t}{\sqrt{(3h)^2+(3h\sin\omega t)^2}} = \frac{\sin\omega t}{\sqrt{1+\sin^2\omega t}}$$

これを f' の式に代入すると

$$f' = \frac{V}{V+3h\omega\cos\omega t\left(\frac{\sin\omega t}{\sqrt{1+\sin^2\omega t}}\right)} f_0$$

解答の形に合わせると

$$f' = \frac{V}{V+\frac{3h\omega\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{1+\sin^2\omega t}}} f_0$$

//