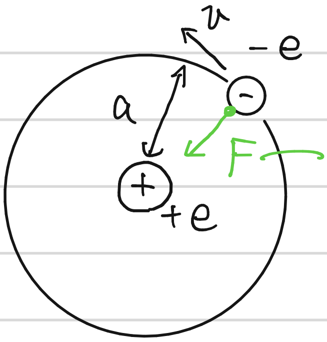
$\boxed{359}$

誘導に従って導出できるようになっておこう。お決まりのパターンである。

(ア)

$\boxed{\text{円運動の運動方程式}}$　$m\dfrac{v^2}{r}=F$ の式である。



$|F|=k\dfrac{|q_1||q_2|}{r^2}$

$=k\dfrac{e^2}{a^2}$

$m\dfrac{v^2}{r}=F$

$\Rightarrow \underline{m\dfrac{v^2}{a}}=k\dfrac{e^2}{a^2}$ … ①

//(ア)

(イ)

①式 $m\dfrac{v^2}{a}=k\dfrac{e^2}{a^2}$ を変形して $\frac{1}{2}mv^2$ の形を作る。

$\Rightarrow mv^2=k\dfrac{e^2}{a}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\underline{\dfrac{ke^2}{2a}}$ //(イ)　これが K である

(ウ)

(イ)の運動エネルギーと、静電気力による位置エネルギーを合計して

$E=K+U$

$=\dfrac{ke^2}{2a}-k\dfrac{e^2}{a}$

$=\underline{-\dfrac{ke^2}{2a}}$ … ②

//(ウ)

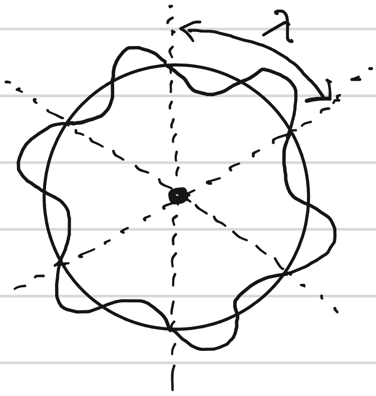
359 続き

(エ)

ここで話はがらっと変わる。

$\boxed{\text{量子条件}}$

電子軌道の円周は、ド・ブロイ波長λの整数倍になる、という条件。
1周で波がぴったり合わさる長さの軌道のみ存在する、というイメージ。



左図はλが6個分でぴったりの場合の図で、これより1つ内側の軌道は、λが5個分でぴったりの円周となるのだ。

ド・ブロイ波長が $\lambda = \dfrac{h}{mv}$ なので量子条件の式は

$$2\pi a = n\lambda$$

$$\Rightarrow 2\pi a = n \cdot \frac{h}{mv}$$

$$\therefore mva = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad \text{// (エ)}$$

(オ)

a を a_n として、(ニ)式 $mva = n \cdot \dfrac{h}{2\pi}$ を変形して $v = \dfrac{nh}{2\pi m a_n}$

これを①式 $m\dfrac{v^2}{a} = k\dfrac{e^2}{a^2}$ に代入して、

$$m\frac{\left(\frac{nh}{2\pi m a_n}\right)^2}{a_n} = k\frac{e^2}{a_n^2} \qquad \therefore a_n = \frac{h^2}{4\pi^2 mke^2} n^2 \quad \text{// (オ)}$$

359 続き

(カ)

EをEnとして。②式 $E=-\frac{ke^2}{2a}$ に(ホ)のaを代入すると。

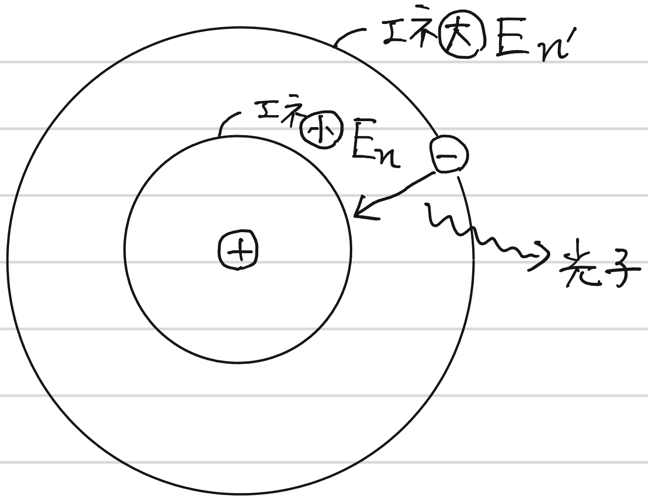
$$E_n=-\frac{ke^2}{2\left(\frac{h^2}{4\pi^2 mke^2}n^2\right)}$$

$$=-\frac{2\pi^2 mk^2e^4}{h^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$ // (カ)

このエネルギーのことを $\boxed{\text{エネルギー準位}}$ という。

(キ)

でてくる光は エネルギー準位の差分のエネルギーを持っている。



エネルギー準位の減った分は

$$E_{n'}-E_n$$

光子のエネルギーEは

$$E=h\nu$$

よって

$$E_{n'}-E_n=h\nu$$

波の式 $v=f\lambda$ より $c=\nu\lambda$ なので

$$E_{n'}-E_n=\frac{hc}{\lambda}$$ // (キ)

$\boxed{359}$ 続き

(ク)

(キ)の式にE_nを代入して整理する.

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{n'} - E_n$$

$$= \left(-\frac{2\pi^2 mk^2e^4}{h^2}\cdot\frac{1}{n'^2}\right) - \left(-\frac{2\pi^2 mk^2e^4}{h^2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2\pi^2 mk^2e^4}{h^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{\lambda} = \underline{\frac{2\pi^2 mk^2e^4}{h^3 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)}\ /\!/ \text{(ク)}$$

(ケ)

$\dfrac{2\pi^2 mk^2e^4}{h^3 c}$ を R とすると. (ケ)の式は

$$\frac{1}{\lambda} = \underline{R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)}\ /\!/ \text{(ケ)}$$

※問題$\boxed{358}$の式の導出となる.

※$\boxed{\text{量子条件}}$などの語句も覚えておきましょう.

※エネルギー準位は井戸型のエネルギーとイメージする。

$$\underbrace{n=\infty\text{で}E_n=0 \qquad n=n\text{で}E_n = -\frac{2\pi^2 mk^2e^4}{n^2h^2}\ (\text{負})}$$