381

(1)

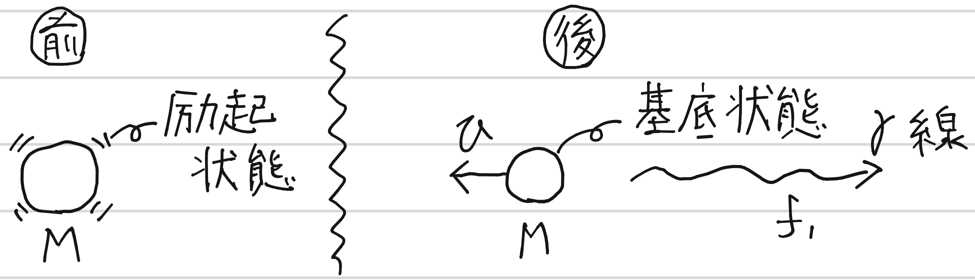
光子のエネルギー E は

$$E = h\nu$$
$$= hf_0$$

これがエネルギー準位の差 E と等しいので

$$E = hf_0$$
$$\therefore f_0 = \frac{E}{h}$$

(2)



運動量の保存より

$$0 = -Mv + \frac{hf_1}{c} \quad \cdots ①$$

光子の運動量は
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

エネルギー保存より

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1 \quad \cdots ②$$

エネルギー準位の差分が光子のみでなく、運動エネルギーにもなっているイメージ

① より $v = \frac{hf_1}{Mc}$，これを ② に代入して

$$E = \frac{1}{2}M\left(\frac{hf_1}{Mc}\right)^2 + hf_1$$
$$0 = \frac{h^2}{2Mc^2}f_1^2 + hf_1 - E$$
$$0 = h^2 f_1^2 + 2Mc^2 h f_1 - 2Mc^2 E$$

2次関数の解の公式より，

$$f_1 = \frac{-2Mc^2h \pm \sqrt{(2Mc^2h)^2 - 4 \cdot h^2(-2Mc^2E)}}{2h^2}$$

$\boxed{381}$ (2) 続き

$$f_1 = \frac{-2Mc^2h \pm \sqrt{4M^2c^4h^2 + 8Mc^2Eh^2}}{2h^2}$$

$$f_1 = \frac{-Mc^2 \pm \sqrt{M^2c^4 + 2Mc^2E}}{h}$$

$f_1 > 0$ なので

$$f_1 = \frac{-Mc^2 + \sqrt{M^2c^4 + 2Mc^2E}}{h}$$

$$= \frac{-Mc^2 + Mc^2\sqrt{1 + \frac{2E}{Mc^2}}}{h}$$

いつもより細かい近似となる.

$$\fallingdotseq \frac{-Mc^2 + Mc^2\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2E}{Mc^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2E}{Mc^2}\right)^2\right\}}{h}$$

$$= \frac{E - \frac{E^2}{2Mc^2}}{h}$$

$$= \underline{\frac{E}{h}\left(1 - \frac{E}{2Mc^2}\right)}$$ //