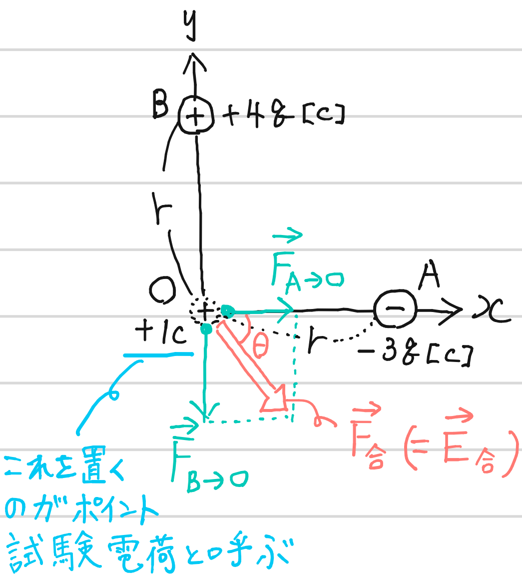
235 電界(電場)… 電荷に電気力がはたらく空間。
1cの電荷をおいたとき受ける力が電場 $\vec{E}$ の大きさと定義した。

⇓

$$|\vec{E}| = k\frac{|Q|}{r^2} \quad , \quad \vec{F} = q\vec{E}$$

(1) O点に1cの電荷をおいたとき、受ける力が電場である。



$|\vec{F}_{A\to O}| = k\frac{3q}{r^2}$ (… 模範解答における E_1)

$|\vec{F}_{B\to O}| = k\frac{4q}{r^2}$ (… 模範解答における E_2)

左図より

$$\tan\theta = -\frac{|\vec{F}_{B\to O}|}{|\vec{F}_{A\to O}|} = -\frac{4}{3}$$ //

(2) 上図より

$$|\vec{E}_合| = |\vec{F}_合| = \sqrt{|\vec{F}_{A\to O}|^2 + |\vec{F}_{B\to O}|^2}$$

$$= \sqrt{\left(k\frac{3q}{r^2}\right)^2 + \left(k\frac{4q}{r^2}\right)^2} = k\frac{5q}{r^2} \text{ [N/C]}$$ //

(3) 上図の $\vec{E}_合$ は+1cの電荷が受ける力を示すので
−2q [c] の場合、力の向きは $\vec{E}_合$ と逆向き //

大きさは $|\vec{E}|$ の 2q倍となるので

$$|\vec{F}| = 2q\cdot k\frac{5q}{r^2} = k\frac{10q^2}{r^2} \text{ [N]}$$ // (※ $\vec{F} = q\vec{E}$ の式である)

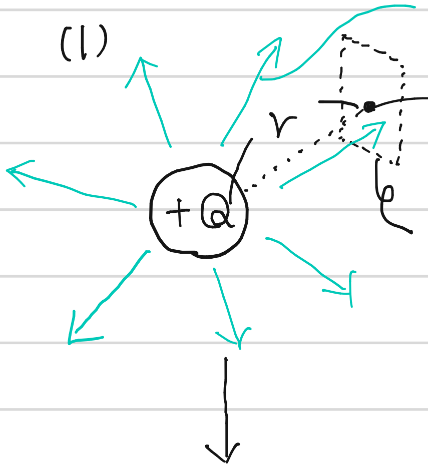
236 ガウスの法則は以下の2つを示す.

① 電場Eの点を通る電気力線の本数はE本

② 電荷Qから出る電気力線の本数は $4\pi kQ$本 ($\frac{Q}{\varepsilon_0}$本)

今回の問題は①から②を導出する問題である.

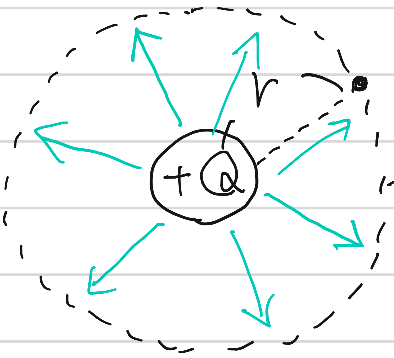
(1)



$|\vec{E}| = k_0\frac{Q}{r^2}$

$1m^2$を想定

↳ この面を$|\vec{E}|$本 電気力線が貫いている



+Qを中心とした半径r[m]の球の表面積Sは

$$S = 4\pi r^2 \ [m^2]$$

であり, $1m^2$あたり$|\vec{E}|$本電気力線あるので全体の本数Nは

$$N = |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2$$

$$= k_0\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$= \underline{4\pi k_0 Q \text{ 本}}$$

(2) $N = 4\pi k_0 Q$

$$= \underline{\frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

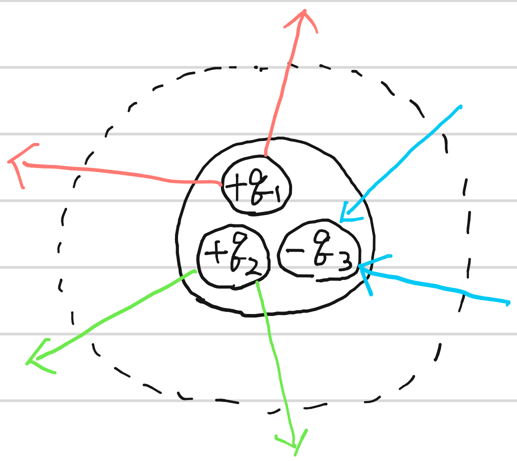
(誘電率は素材ごとに値のちがうパラメータ。$N = 4\pi kQ$本, $N = \frac{Q}{\varepsilon_0}$本は暗記しておこう)

237 ガウスの法則は以下の2つを示す。

① 電場Eの点を通る電気力線の本数はE本

② 電荷Qから出る電気力線の本数は $4\pi kQ$本 ($\frac{Q}{\varepsilon_0}$本)

(ア)



⊕は発射される向き
⊖は入っていく向き
に発生する。

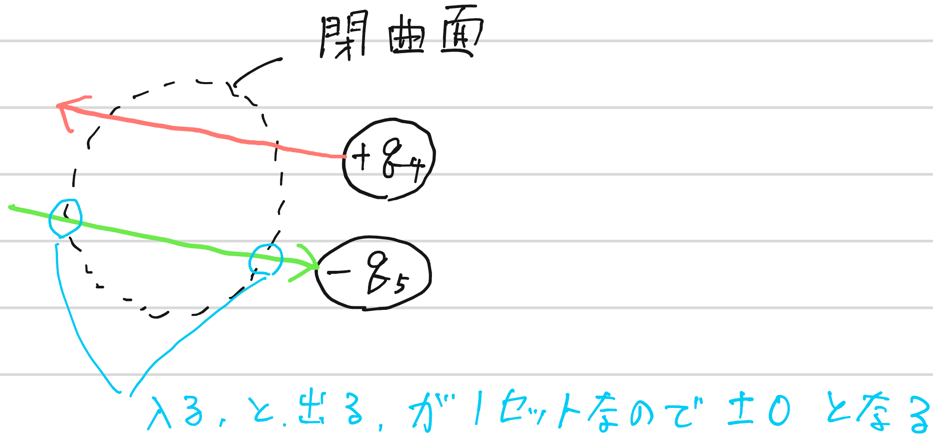
⇓

電気力線の総本数は向きが逆のときは差し引きする。
(電場Eで本数を定義しており、電場は重ね合わせて計算するので、電気力線も重ね合わせでの計算となる)

$N = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ の式を用いて総本数を数えると、

$$N = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 - q_3)$$

※「閉曲面外の電荷 $+q_4$, $-q_5$ は無関係」について



$\boxed{237}$ 続き

(イ) 球の表面積の公式より

$$S = \underline{4\pi r^2}$$

(ウ) 1 m^2 あたり E[本] で 全体が $4\pi r^2$ [m^2] なので

$$N = E \cdot S = \underline{4\pi r^2 E}$$

(エ) ガウスの法則より

$$N = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{[本]}$$

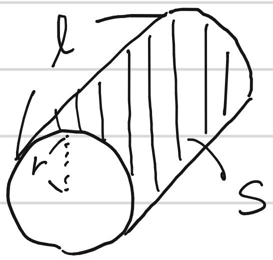
なので (ニ)の式とあわせて

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

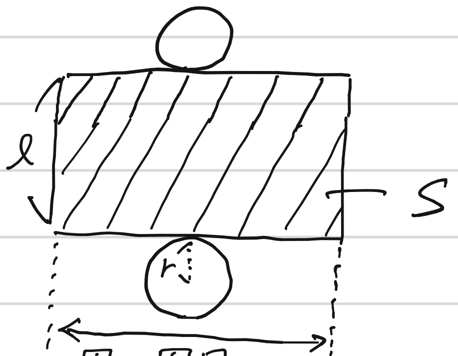
$$\therefore E = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

($\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ なので これを代入すると $E = k\frac{Q}{r^2}$ となる)

(オ)



展開して →



円の円周と
等しい ⇒ $2\pi r$

よって $S = \underline{2\pi r l}$

(カ) 線電荷 ρ [C/m] … 1m あたりに ρ [C] あるということ

⇒ l [m] に分布する量は $Q = \underline{\rho l \text{ [C]}}$

(キ) ガウスの法則より、$\frac{Q}{\varepsilon_0}$ [本] でており、全面積 S が $2\pi r l$ [m^2] なので、1 m^2 あたりの本数を求めると

$$\frac{\frac{Q}{\varepsilon_0}}{S} \Rightarrow \frac{\rho l}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r l} \Rightarrow \underline{\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$ これが電場となる。

$\boxed{238}$

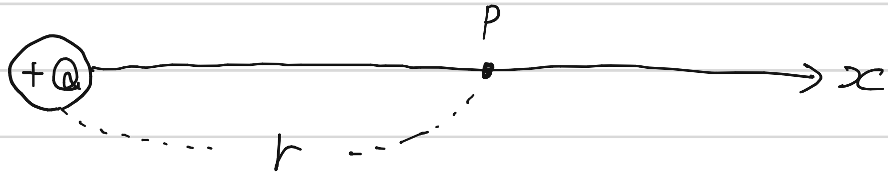
・電位 … 電気的なエネルギーの高さのイメージ

定義は『1Cが1V移動するときの仕事が1J』

⇒ 定義式 $\underline{W = q\Delta V}$

※電位も電位差も同じ文字Vで示されることが多い。しかし、区別しないと理解しづらいので、この解説では電位をV、電位差を⊿Vと書くこととする。

(1)



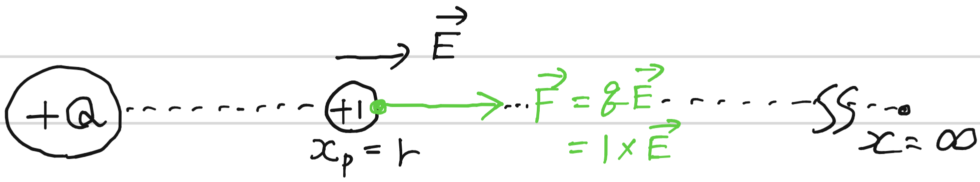
点電荷のまわりの電位は無限遠点をV=0の基準としたとき

$$V = k\frac{Q}{r}$$

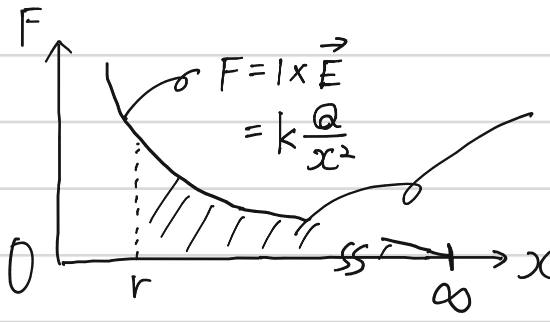
← 1乗なことに注意。 暗記でよい

※模範解答では、電場を積分して求めている。これは、電位の定義『1Cが1V移動するときの仕事が1J』を用いている。

Pでの電位をV_Pとすると、1Cの電荷がPから$x=\infty$まで移動したときの仕事量が、V_Pといえるのだ。



仕事量は(力)×(距離)なので F−xグラフの面積となる。



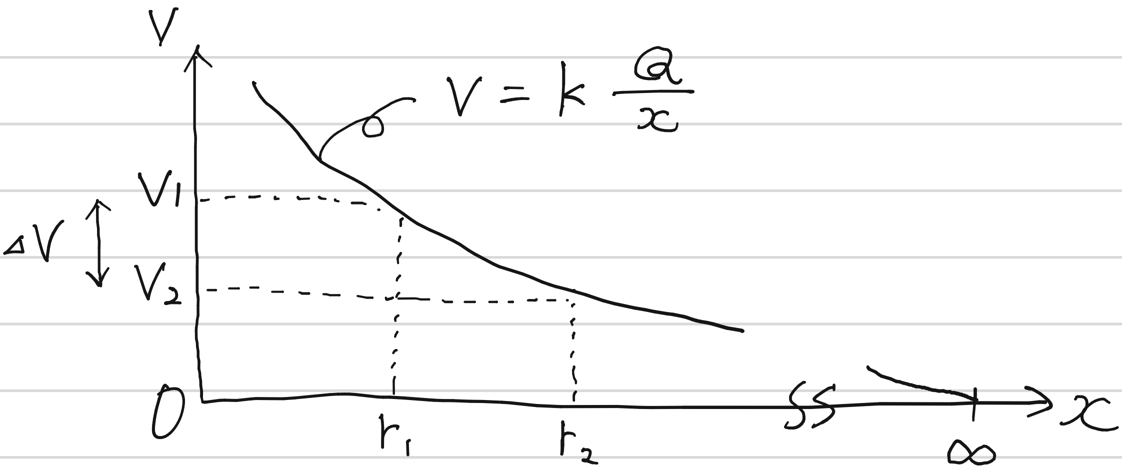
$$W = \int_r^{\infty} 1\times E\,dx$$

$$= \int_r^{\infty} k\frac{Q}{x^2}dx$$

$$= kQ\left[-\frac{1}{x}\right]_r^{\infty} = k\frac{Q}{r}$$

$\boxed{238}$ 続き

(2) 高さのイメージをグラフにしてみる。



$$\Delta V = V_1 - V_2$$

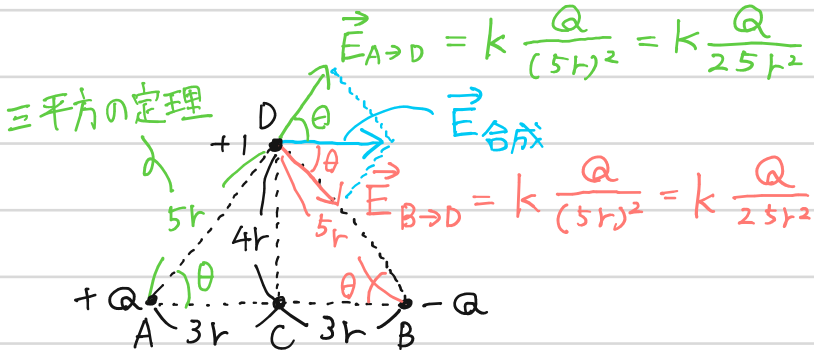
$$= k\frac{Q}{r_1} - k\frac{Q}{r_2}$$

$$= kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$\boxed{239}$ 電界(電場)… 1C を置いたとき受ける力，ベクトル量
電位 … 電気的なエネルギーの高さ，スカラー量

(ア)(イ)

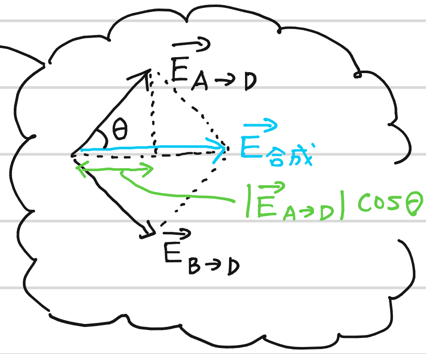
電場なので 1C を置いて受ける力を計算して考える。



上図のように書け，$\vec{E}_{A\to D}$ と $\vec{E}_{B\to D}$ を合成した $\vec{E}_{合成}$ は
A→B 向き // (ア) と分かる。(図の右向き)

大きさは

$$|\vec{E}_{合成}| = 2\times|\vec{E}_{A\to D}|\cos\theta$$



といえ，△ADC より $\cos\theta = \frac{3}{5}$ なので

$$|\vec{E}_{合成}| = 2\times k\frac{Q}{25r^2}\times\frac{3}{5}$$

$$= \frac{6kQ}{125r^2} \ // \ (イ)$$

(ウ) 点電荷のまわりの電位を $V = k\frac{Q}{r}$ でだして重ね合わせる

$$V_{A\to D} = +k\frac{Q}{5r} \quad (\text{A の電荷による D の電位})$$

$$V_{B\to D} = -k\frac{Q}{5r} \quad (\text{B の電荷による D の電位})$$

$$V_{合成} = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 0 \ //$$

※ CD 上は全て等電位で 0V となる。模範解答にある電場とのつながりは $\boxed{242}$ の後に読んだら理解できる。

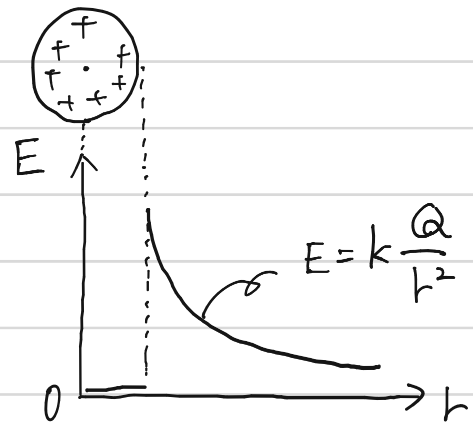
240 ・電位 … 電気的なエネルギーの高さのイメージ
定義は『1cを1v移動させるときの仕事が1J』
⇒ 定義式 $W = q\Delta V$

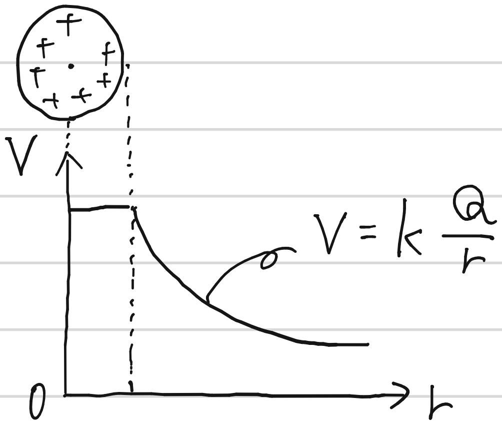
※電位も電位差も同じ文字Vで示されることが多い。
しかし、区別しないと理解しづらいので、この解説では
電位をV、電位差をΔVと書くこととする。

・電位と電場の関係 … 電位の傾きが電場
$$\Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d}$$

(1)(2) 導体球内は全て等電位となる。
⇒電位の傾きがないので電場は0になる
導体球の外は、点電荷のまわりの電場の式、電位の式より
$$E = k\frac{Q}{r^2} \qquad V = k\frac{Q}{r}$$ (無限遠点がV=0の基準)

これよりグラフを書くと





※ V－r グラフの傾きが E－rグラフの値の大きさになっている。

241

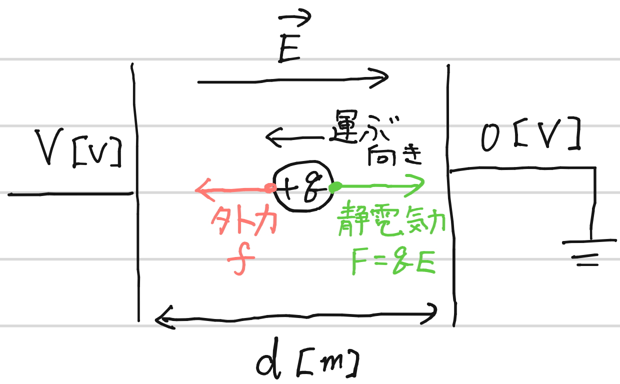
・⏚ … アース，電位 0[V] の基準
・電位や電場の定義をきちんと日本語で理解しよう．

(ア)(イ)

電場の定義，「+1C の電荷を置いたとき受ける力が電場 $\vec{E}$」より
+q[C] は $\underline{\text{電界(電場)の向きに}}_{//}$(ア) $\underline{qE\ [N]}_{//}$(イ)
の力を受ける。(定義式：$\vec{F} = q\vec{E}$)

(−q[C] だったら電場と逆向きの力を受ける)

(ウ)



上図のように静電気力に逆らって運ぶ．このとき，

$$f = F \Rightarrow f = qE$$

といえ．距離 d[m] 運ぶので $W = Fx$ より

$$W = fd$$
$$= \underline{qEd}_{//}$$

(エ) 電位の定義「1C の 1V 分が 1J」より

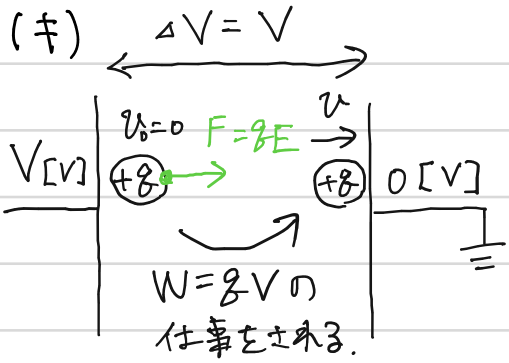
$$W = q\Delta V = \underline{qV}_{//}$$

(オ)(カ) (ウ)と(エ)の式より

$$qEd = qV$$
$$\therefore E = \underline{\frac{V}{d}}_{//}\text{(オ)} \longleftarrow \frac{[V]}{[m]} \text{ なので単位は } \underline{[V/m]}\text{(カ)}$$

$\boxed{241}$ 続き

(キ)

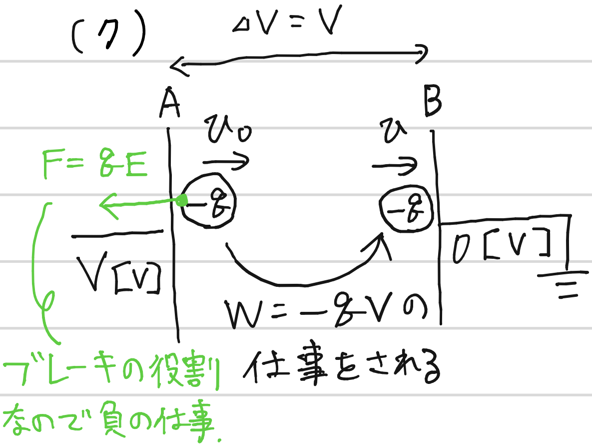


㊒運動エネ＋仕事 ＝ ㊙運動エネ

$$0 + qV = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \ [m/s] \ \text{//} \ (キ)$$

(ク)



前運動エネ＋仕事 ＝ 後運動エネ

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (-qV) = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{}$$

ここが $\geqq 0$ なら
Bに到達する

よって,到達する条件は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - qV \geqq 0$$

$$\therefore V \leqq \frac{mv_0^2}{2q}$$

到達しない条件はこれを満たさないときなので

$$V > \frac{mv_0^2}{2q} \ \text{//}$$

※ 不等合の条件式は式がごちゃごちゃしがちなので,
「ギリギリ条件を満たすとき」を考えて,そこから条件式としていくとよい.

今回はBに到達するときの式をたてると,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (-qV) = 0 \quad \therefore V = \frac{mv_0^2}{2q} \ \text{でギリ到達.}$$

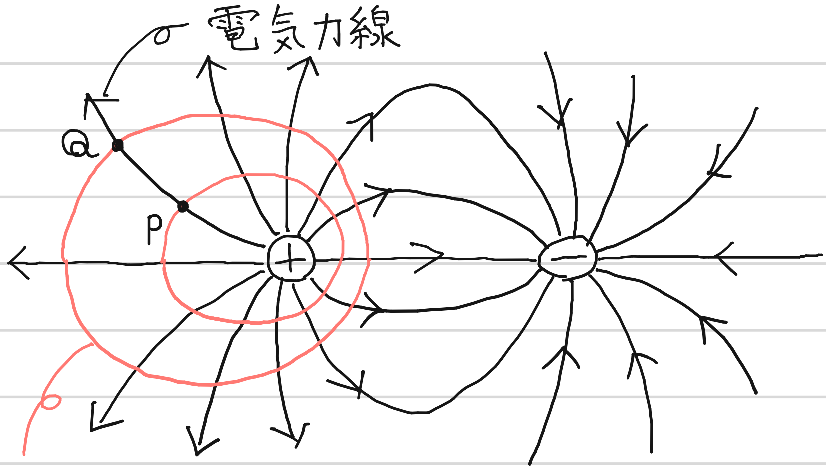
これより電位差が大きいと到達できなくなるので

$$V > \frac{mv_0^2}{2q} \ \text{//}$$

と条件式をたてられる.

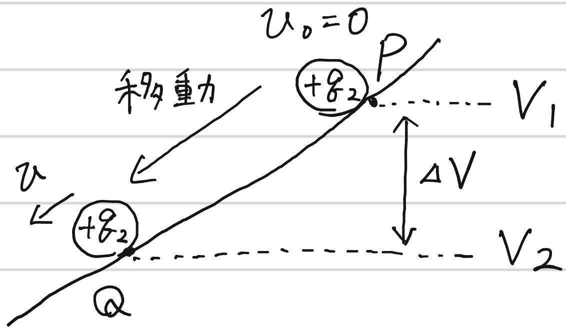
$\boxed{242}$ 等電位線と電気力線は必ず直交することがポイント

(1)



(2) 等電位線に沿って動かすということは、
電位のアップダウンがないということである。
電位のアップダウンがないということは仕事はない。⇒ $\underline{0\,\text{J}}$

(3) P → Q に移動したときを高さのイメージでとらえると、



このとき $+q_2$ がされる仕事は

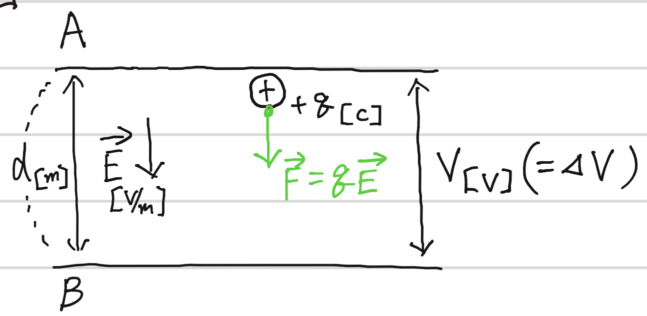
$$W = q\Delta V = q(V_1 - V_2)$$

前 運動エネ + 仕事 = 後 運動エネの式をたてると、

$$0 + q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore\ v = \underline{\sqrt{\frac{2q_2(V_1 - V_2)}{m}}}$$

$\boxed{243}$



(ア) 電場の定義より

$$F = \underline{qE}_{//}$$

(イ) $W = Fx$ より

$$W = \underline{qEd}_{//}$$

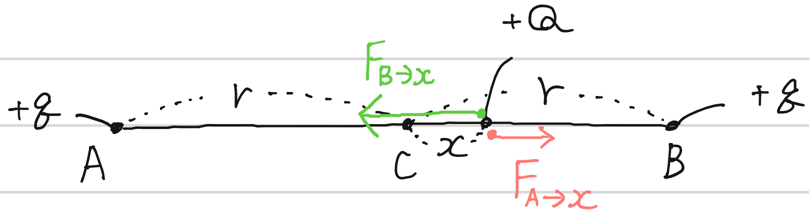
(ウ) 電位の定義より $q = 1\,\mathrm{C}$ のときの仕事が電位差となるので

$$\Delta V = 1 \times Ed \quad (\because W = qEd,\ q = 1)$$

$$= \underline{Ed}_{//}$$

$\boxed{244}$ (発展問題)

(1)



上図の左向きへの合力を f とすると.

$$f = F_{B\to x} - F_{A\to x}$$

$$= k\frac{Qq}{(r-x)^2} - k\frac{Qq}{(r+x)^2}$$

$$= kQq\left\{\frac{1}{(r-x)^2} - \frac{1}{(r+x)^2}\right\}$$

$$= kQq\left\{\frac{(r+x)^2-(r-x)^2}{(r-x)^2(r+x)^2}\right\}$$

$$= kQq\left\{\frac{r^2+2rx+x^2-(r^2-2rx+x^2)}{(r^2-2rx+x^2)(r^2+2rx+x^2)}\right\}$$

$$= kQq\left\{\frac{4rx}{r^4-2r^2x^2+x^4}\right\}$$

$$= \frac{4kQqr}{(r^2-x^2)^2}x = \frac{4kQqr}{\left\{r^2\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\right\}^2}x$$

$$= \frac{4kQqr}{r^4\left\{1-\underbrace{\left(\frac{x}{r}\right)^2}_{\fallingdotseq 0}\right\}^2}x$$

0 $(\because x \ll r)$

$$\fallingdotseq \frac{4kQq}{r^3}x$$

//

244 続き.

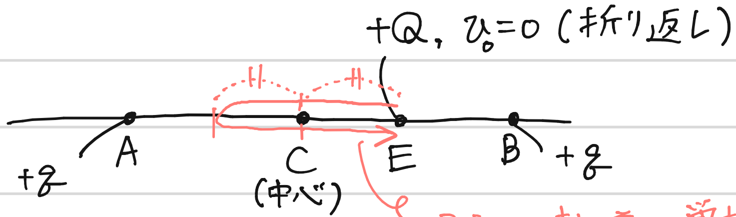
(2) 図の変位 x の方向(右向き)を正としたとき. 合力 F は

$$F = -f = -\frac{4kQq}{r^3}x$$

xと逆向き　　xに比例

復元力となっている。

単振動をするので. 単振動の時間に関する解法で解いていく.



こういう軌道の単振動をする

⇒ E → C は $\frac{T}{4}$[s] で移動.

単振動の運動方程式をたてると

$$-m\omega^2 x = -\frac{4kQq}{r^3}x \quad (\because a = -\omega^2 x)$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{4kQq}{mr^3}}$$

これより周期 T を求めると

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{4kQq}}$$

E→C への移動は $\frac{T}{4}$[s] かかるので

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mr^3}{4kQq}}$$

$$= \underline{\frac{\pi r}{4}\sqrt{\frac{mr}{kQq}}}$$