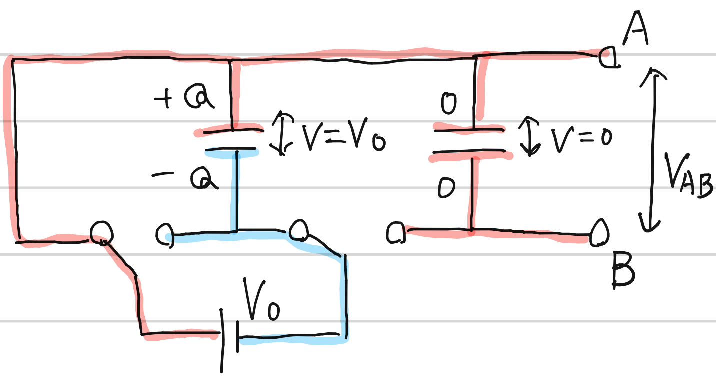
257

(1)

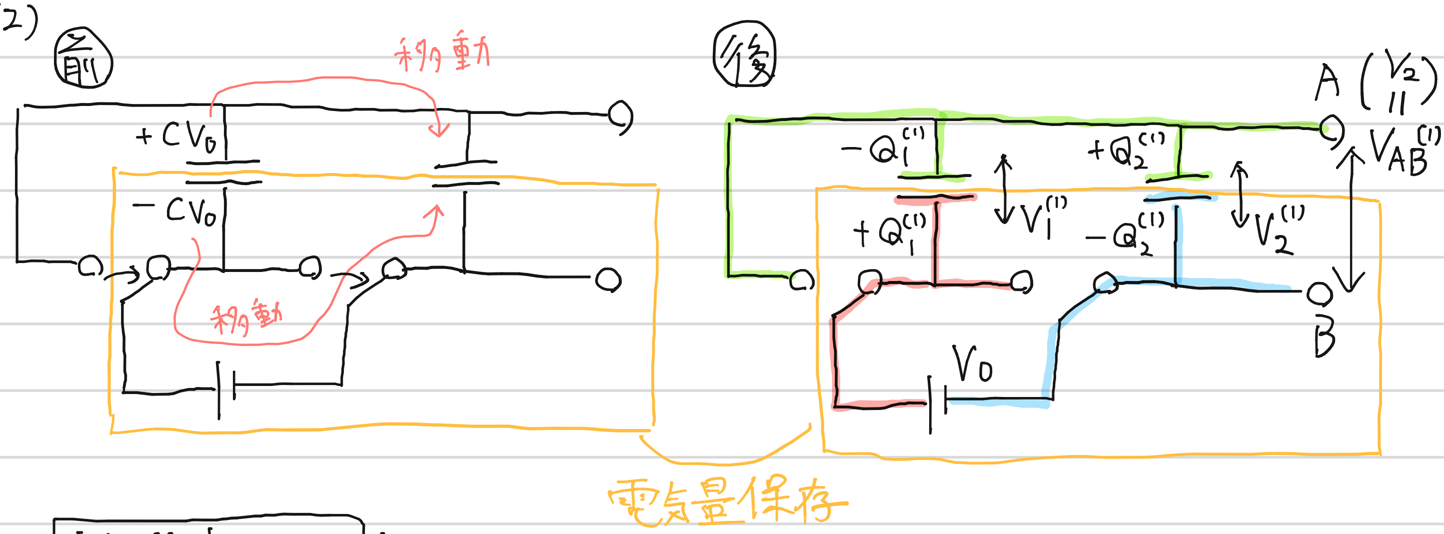


左図のように電位差がかかるので

$$V_{AB} = 0$$

$$(Q = CV_0)$$

(2)



$\boxed{\text{キルヒホッフ則}}$ より

$$V_0 = V_1^{(1)} + V_2^{(1)} \quad \cdots ①$$

(1) は「1回目の操作」を示す。
指数ではないので注意

$\boxed{\text{電気量保存}}$ より

$$-CV_0 = +Q_1^{(1)} - Q_2^{(1)} \quad \cdots ②$$

$\boxed{Q = CV}$ より

$$Q_1^{(1)} = CV_1^{(1)} \cdots ③ \qquad Q_2^{(1)} = CV_2^{(1)} \cdots ④$$

② に ③, ④ を代入して

$$-CV_0 = CV_1^{(1)} - CV_2^{(1)} \quad \cdots ②'$$

① を変形して

$$V_1^{(1)} = V_0 - V_2^{(1)} \quad \cdots ①'$$

①' を ② に代入して

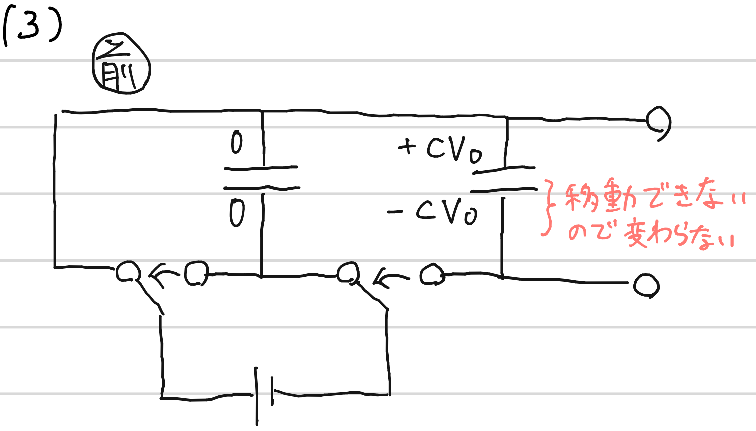
$$-CV_0 = C(V_0 - V_2^{(1)}) - CV_2^{(1)}$$

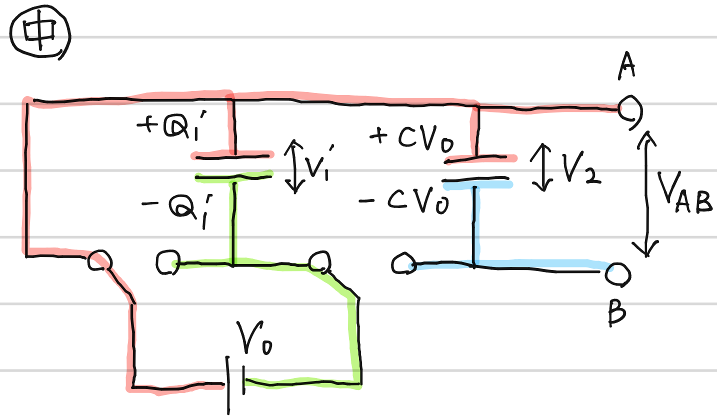
$$\therefore V_2^{(1)} = V_0 \quad \Rightarrow \quad V_{AB}^{(1)} = V_2^{(1)} = V_0$$

(① より $V_1^{(1)} = 0$, ③ より $Q_1^{(1)} = 0$, ④ より $Q_2^{(1)} = CV_0$)

257 続き

(3)





いったん左に接続すると㊥のようになる。

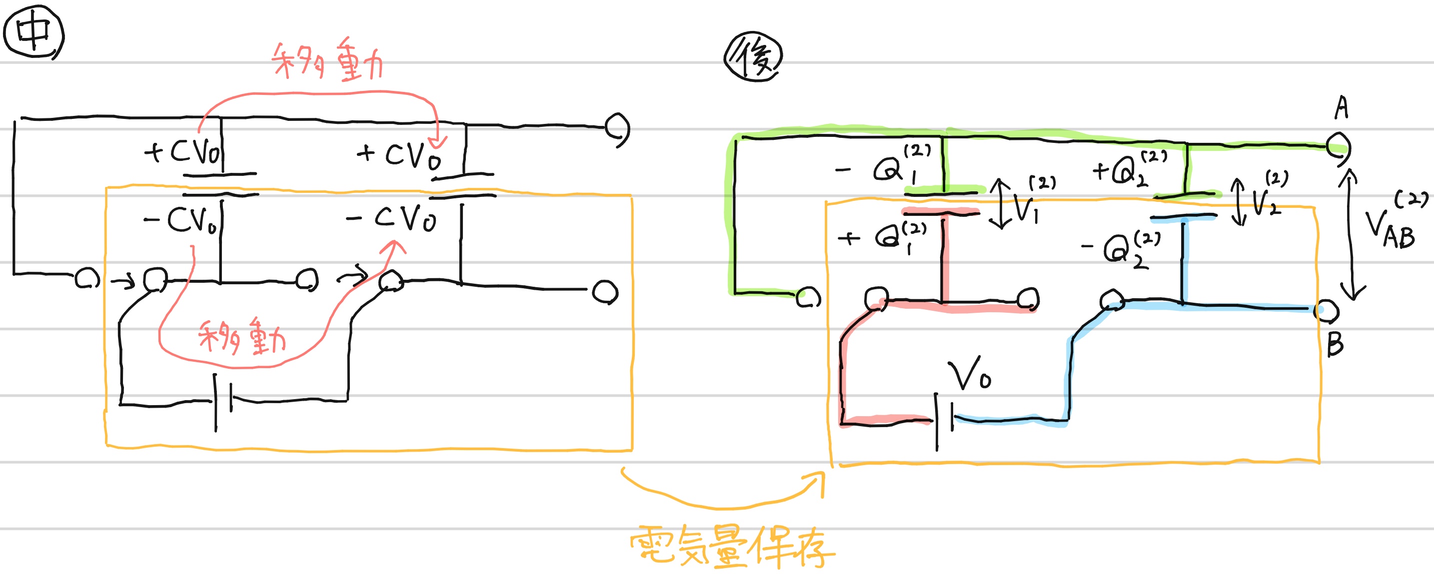
C_1には $V_1' = V_0$ の電圧がかかり，C_2は状態が変化しない。

よって

$$Q_1' = CV_0$$

をC_1に充電した状態になる。

再度，右に接続した図をかいてみる。



$\boxed{\text{キルヒホッフ則}}$ より

$$V_0 = V_1^{(2)} + V_2^{(2)} \quad \cdots ⑤$$

$\boxed{\text{電気量保存}}$ より

$$-CV_0 + (-CV_0) = Q_1^{(2)} + (-Q_2^{(2)}) \quad \cdots ⑥$$

$\boxed{Q = CV}$ より

$$Q_1^{(2)} = CV_1^{(2)} \quad \cdots ⑦ \qquad Q_2^{(2)} = CV_2^{(2)} \quad \cdots ⑧$$

257 続き

⑥に⑦, ⑧を代入して.

$$-CV_0+(-CV_0) = CV_1^{(2)} - CV_2^{(2)} \quad \cdots ⑥'$$

⑤を変形して

$$V_1^{(2)} = V_0 - V_2^{(2)} \quad \cdots ⑤'$$

⑤'を⑥'に代入して

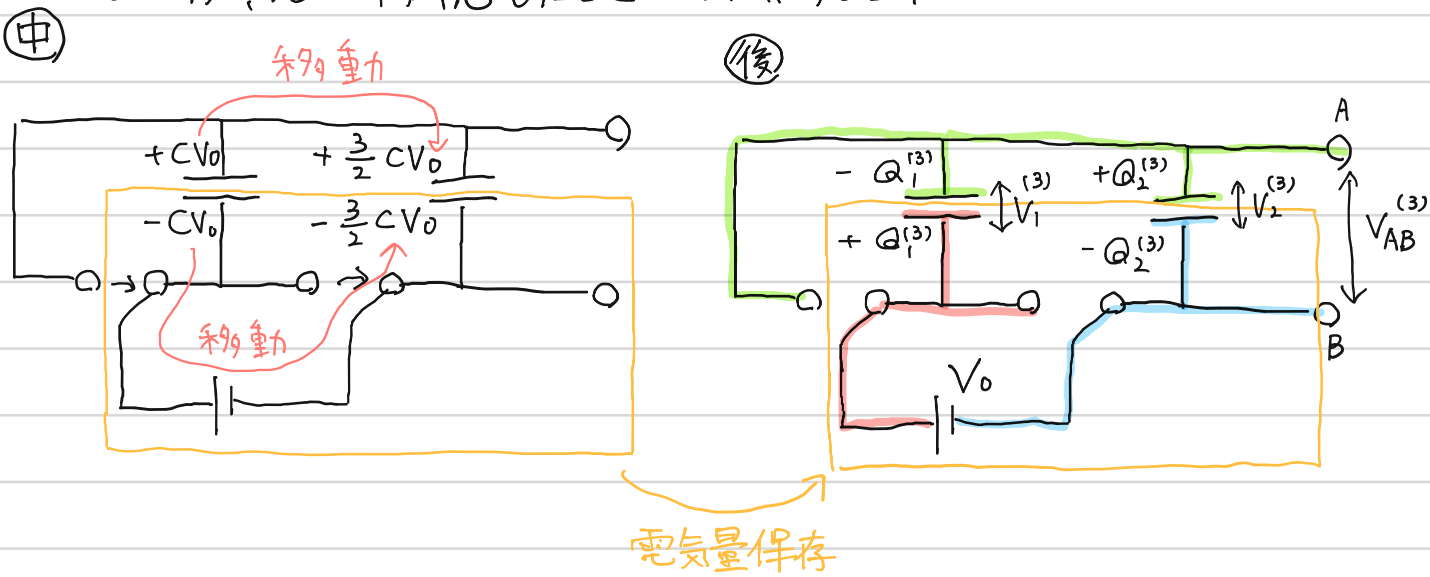
$$-CV_0+(-CV_0) = C(V_0-V_2^{(2)}) - CV_2^{(2)}$$

$$\therefore V_2^{(2)} = \frac{3}{2}V_0$$

$$\Rightarrow V_{AB}^{(2)} = V_2^{(2)} = \underline{\frac{3}{2}V_0}_{/\!/}$$

(⑤'より $V_1^{(2)} = -\frac{1}{2}V_0$, ⑦より $Q_1^{(2)} = -\frac{1}{2}CV_0$, ⑧より $Q_2^{(2)} = \frac{3}{2}CV_0$)

(4) 前問(3)と同様. 左に接続すると、C_1 に $Q_1 = CV_0$ が充電される.
その後, 右に接続したときを計算すると.



$\boxed{\text{キルヒホッフ則}}$ より

$$V_0 = V_1^{(3)} + V_2^{(3)} \quad \cdots ⑨$$

$\boxed{\text{電気量保存}}$ より

$$-\frac{1}{2}CV_0 - \frac{3}{2}CV_0 = +Q_1^{(3)} + (-Q_2^{(3)}) \quad \cdots ⑩$$

$\boxed{Q=CV}$ より

$$Q_1^{(3)} = CV_1^{(3)} \quad \cdots ⑪ \qquad Q_2^{(3)} = CV_2^{(3)} \quad \cdots ⑫$$

257 (4) 続き

⑩ に ⑪, ⑫ を代入して

$$-\frac{1}{2}CV_0 + \frac{3}{2}CV_0 = CV_1^{(3)} - CV_2^{(3)} \quad \cdots ⑩'$$

⑨ を変形して

$$V_1^{(3)} = V_0 - V_2^{(3)} \quad \cdots ⑨'$$

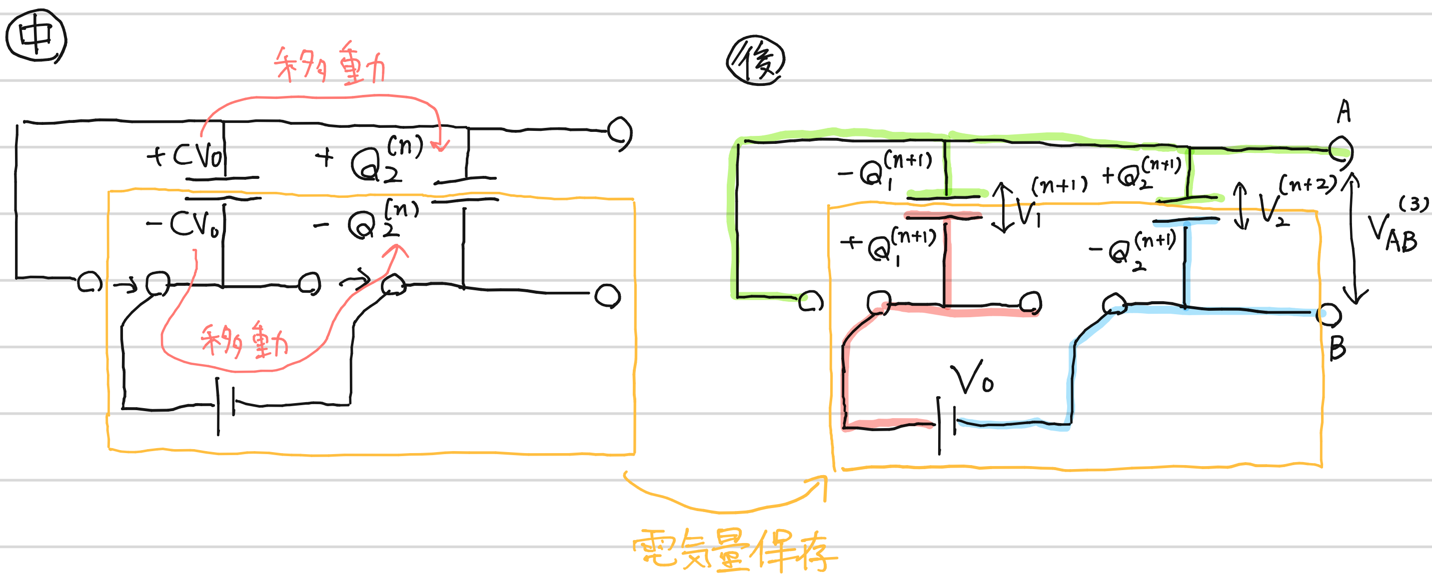
⑨' を ⑩' に代入して

$$-\frac{1}{2}CV_0 - \frac{3}{2}CV_0 = C(V_0 - V_2^{(3)}) - CV_2^{(3)}$$

$$\therefore V_2^{(3)} = \frac{7}{4}V_0$$

$$\Rightarrow V_{AB} = V_2^{(3)} = \underline{\frac{7}{4}V_0}$$

(5) 1回操作をする中で ㊥ で必ず C_1 で $Q_1 = CV_0$ 充電され、電気量保存の電荷が増えていっていることがわかる。ここに注目して n回目 → $(n+1)$回目で作図をしてみると、



キルヒホッフ則 より

$$V_0 = V_1^{(n+1)} + V_2^{(n+1)} \quad \cdots ⑬$$

電気量保存 より

$$-CV_0 - Q_2^{(n)} = +Q_1^{(n+1)} + (-Q_2^{(n+1)}) \quad \cdots ⑭$$

$Q = CV$ より

$$Q_2^{(n)} = CV_{AB}^{(n)} \cdots ⑮ \qquad Q_1^{(n+1)} = CV_1^{(n+1)} \cdots ⑯ \qquad Q_2^{(n+1)} = CV_2^{(n+1)} \cdots ⑰$$

$\boxed{257}$ (5) 続き

⑭に⑮,⑯,⑰を代入して

$$-CV_0 - CV_{AB}^{(n)} = CV_1^{(n+1)} - CV_2^{(n+1)} \quad \cdots ⑭'$$

⑬より

$$V_1^{(n+1)} = V_0 - V_2^{(n+1)} \quad \cdots ⑬'$$

⑭'に⑬'を代入して

$$-CV_0 - CV_{AB}^{(n)} = C\left(V_0 - V_2^{(n+1)}\right) - CV_2^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow \quad 2V_2^{(n+1)} = V_{AB}^{(n)} + 2V_0$$

$$\therefore V_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}V_{AB}^{(n)} + V_0$$

$\Rightarrow V_{AB}^{(n+1)} = V_2^{(n+1)}$ なので

$$V_{AB}^{(n+1)} = \frac{1}{2}V_{AB}^{(n)} + V_0$$

nを非常に大きくしたとき

$$V_{AB}^{(n+1)} \fallingdotseq V_{AB}^{(n)}$$

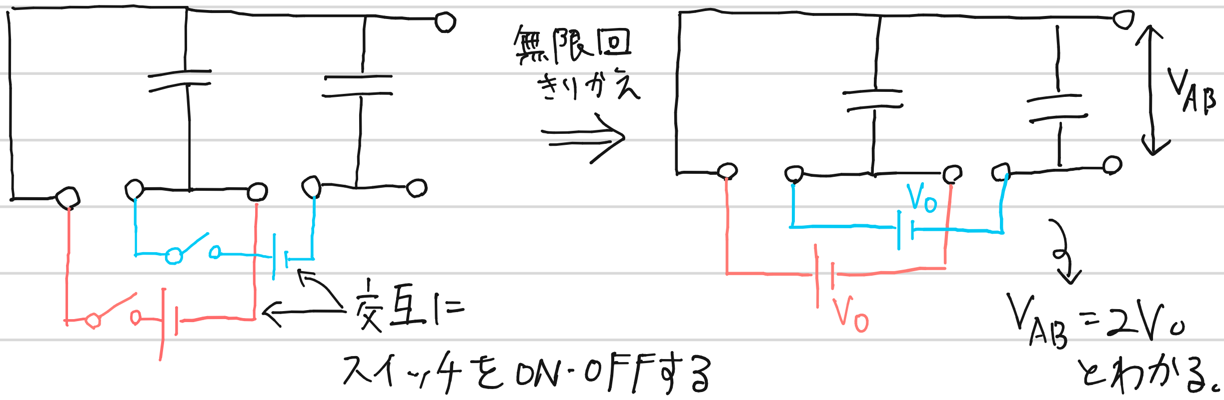
なので

$$V_{AB}^{(\infty)} \fallingdotseq \frac{1}{2}V_{AB}^{(\infty)} + V_0$$

$$\therefore V_{AB}^{(\infty)} = \underline{2V_0}_{\#}$$

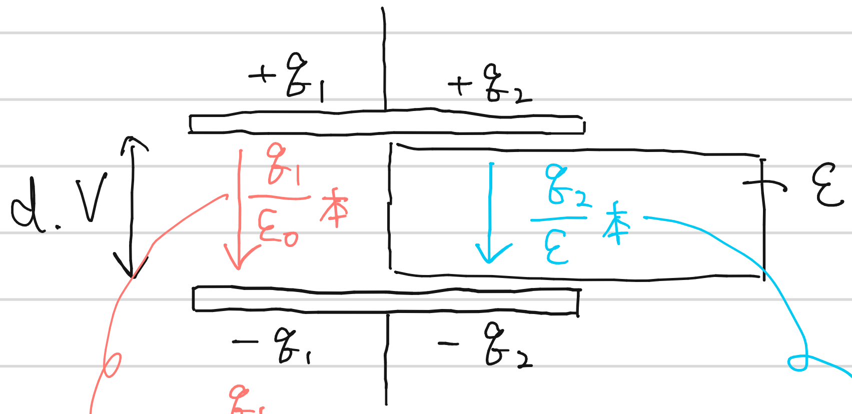
(※(1)〜(4)の答えより、$V_{AB}^{(n)} \to V_{AB}^{(n+1)}$ の変化量が小さくなっていることから判断できる)

※ 無限回くり返し、はスイッチを導線としたときと同じ、と考える参考書もある。今回の問題では、下図のように書くことで同様に考えることができる。



258

(ア)(イ) 電気力線の本数を $(本数)=\frac{Q}{\varepsilon}$ 本 の $\boxed{公式}$ で考える。



$$E_1 = \frac{\frac{q_1}{\varepsilon_0}}{\frac{S}{2}} \quad (1\,m^2あたりの本数 = E)$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0 \frac{S}{2}} \quad (ア)$$

$$E_2 = \frac{\frac{q_2}{\varepsilon}}{\frac{S}{2}}$$

$$= \frac{q_2}{\varepsilon \frac{S}{2}} \quad \text{//}(イ)$$

(ウ).(エ) $V = Ed$ より

$$V = E_1 d = \frac{2q_1}{\varepsilon_0 S} d \quad \text{//}(ウ)$$

$$V = E_2 d = \frac{2q_2}{\varepsilon S} d \quad \text{//}(エ)$$

(オ) $Q = q_1 + q_2$ と連立する。

(ウ)より

$$q_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{2d} V$$

(エ)より

$$q_2 = \varepsilon \frac{S}{2d} V$$

$Q = q_1 + q_2$ に代入して

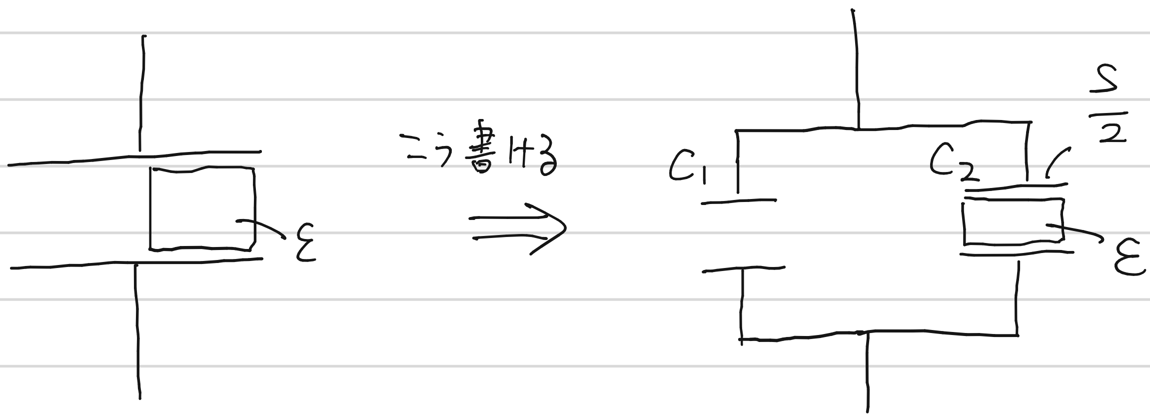
$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{2d} V + \varepsilon \frac{S}{2d} V = (\varepsilon_0 + \varepsilon) \frac{S}{2d} V \quad \text{//}(オ)$$

(カ) $Q = CV$ とくらべて

$$C = (\varepsilon_0 + \varepsilon) \frac{S}{2d} \quad \text{//}(カ)$$

$\boxed{258}$ 続き

(キ)(ク)　式からというより知識として知っておこう.

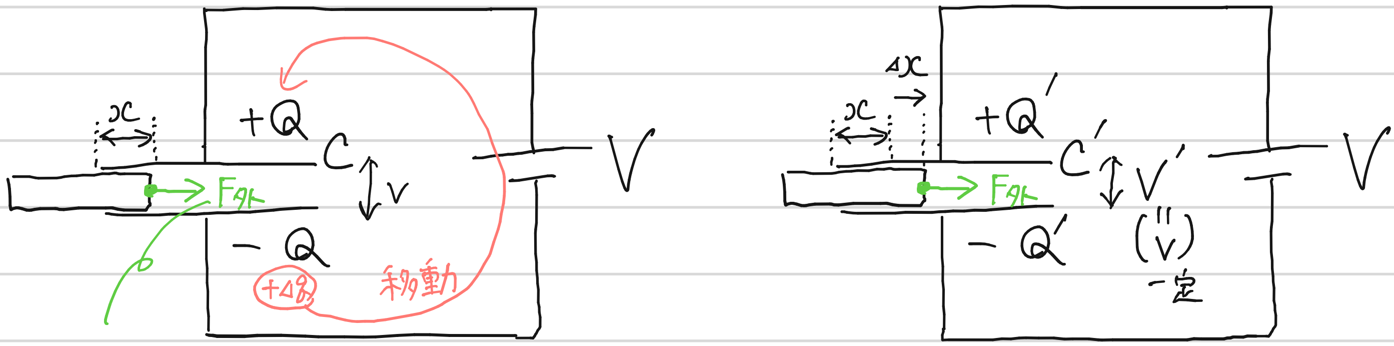


$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{\frac{S}{2}}{d} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \frac{S}{2d}}} \text{(キ)}$$

$$C_2 = \varepsilon \frac{\frac{S}{2}}{d} = \underline{\underline{\varepsilon \frac{S}{2d}}} \text{(ク)}$$

※C_1とC_2を並列の合成公式で
あわせると(カ)が導ける.

$\boxed{259}$ 電池をつないで変化させているので、Qは変化していくことに注意



本来は極板から受ける静電気力が引き込む向きにはたらくので F外 は x軸負の向き(左)なのだが、問題でこの向きに指定されているのでこう書く。

上図のように文字をおくと

(コンデンサーのエネルギーの変化 ΔU) $= U' - U$

$$= \frac{1}{2}C'V^2 - \frac{1}{2}CV^2$$

$$= \frac{1}{2}(C' - C)V^2$$

(電池がした仕事 $W_{電}$) $= \Delta Q V$

$$= (Q' - Q)V$$

$$= (C'V - CV)V$$

$$= (C' - C)V^2$$

(外力がした仕事 $W_{外}$) $= F_{外} \cdot \Delta x$

エネルギー収支の式にすると、

$$\Delta U = W_{電} + W_{外}$$

$$\underline{\frac{1}{2}(C' - C)V^2 = (C' - C)V^2 + F_{外} \cdot \Delta x}$$ //

$\boxed{259}$ 続き

エネルギー収支の式を $F_{外}$ について解いて、

$$F_{外} = \left\{ \frac{1}{2}(C' - C)V^2 - (C' - C)V^2 \right\} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= -\frac{1}{2}(C' - C)\frac{V^2}{\Delta x}$$

誘電体を入れると、電気容量は大きくなるので $(C' > C)$ となり、
$F_{外}$ は $\underline{負}$ とわかる。
大きさは上式より

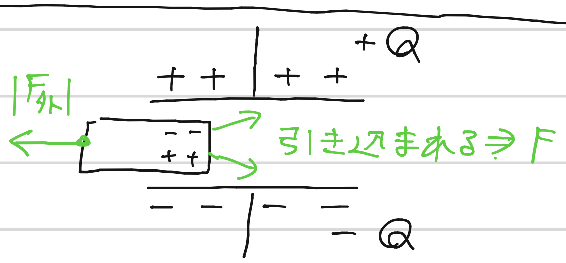
$$\underline{\frac{1}{2}(C' - C)\frac{V^2}{\Delta x}}$$

(2) ゆっくり $\longrightarrow$ 加速度 0 $\longrightarrow$ 力はつりあっている
という関係から、

$$F = |F_{外}| = \underline{\frac{1}{2}(C' - C)\frac{V^2}{\Delta x}}$$

<u>(正の向き)</u>

誘電分極で誘電体に
異符合の電荷が表れるので
引きこまれるのだ (重要)



(3)

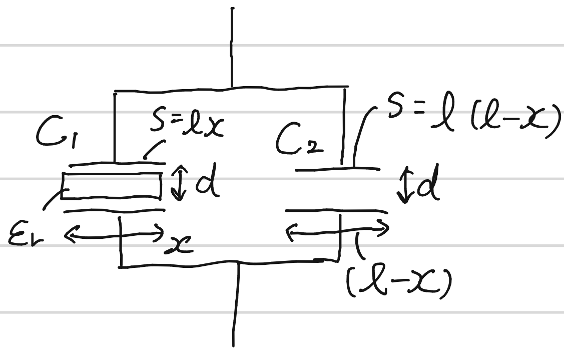
(a) 右図のように書けて、並列の合成
公式を用いると

$$C = C_1 + C_2$$

$$= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{lx}{d} + \varepsilon_0 \frac{l(l-x)}{d}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left\{\varepsilon_r x + (l - x)\right\}$$

$$= \underline{\frac{\varepsilon_0 l}{d}\left\{(\varepsilon_r - 1)x + l\right\}}$$



$\boxed{259}$ (3) 続き

(b)

(a)と同様に C' を求めると

$$C' = C_1' + C_2'$$

$$= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{l(x+\Delta x)}{d} + \varepsilon_0 \frac{l\{l-(x+\Delta x)\}}{d}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left[\varepsilon_r\{x+\Delta x\} + \{l-(x+\Delta x)\}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left\{(\varepsilon_r - 1)(x+\Delta x) + l\right\}$$

よって

$$\Delta C = C' - C$$

$$= \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left\{(\varepsilon_r - 1)(x+\Delta x) + l\right\} - \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left\{(\varepsilon_r - 1)x + l\right\}$$

$$= \underline{\frac{\varepsilon_0 l}{d}(\varepsilon_r - 1)\Delta x}$$

(C) (2) より

$$F = \frac{1}{2}(C' - C)\frac{V^2}{\Delta x}$$

(b) で求めた $(C'-C)$ を代入して

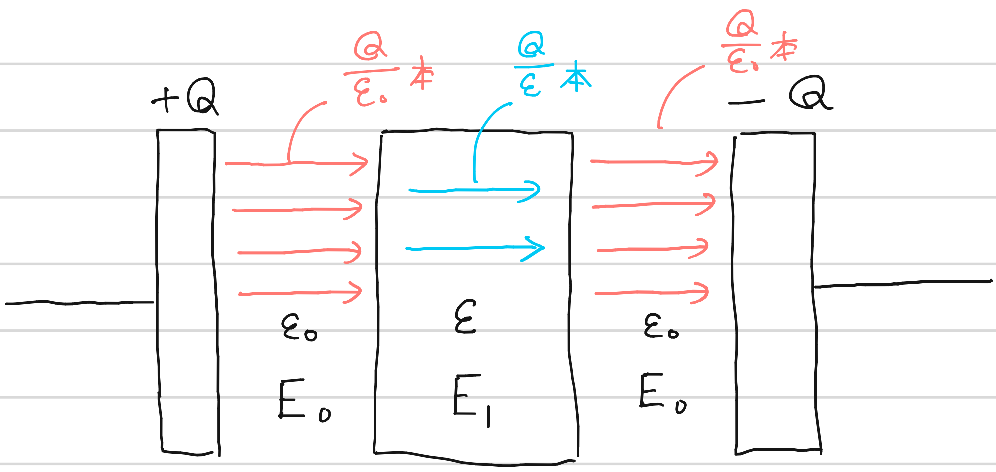
$$F = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 l}{d}(\varepsilon_r - 1)\Delta x \cdot \frac{V^2}{\Delta x}$$

$$= \underline{\frac{\varepsilon_0 l}{2d}(\varepsilon_r - 1)V^2}$$

x によらないことが分かる。

$\boxed{260}$ 回路にしていないのでQが変化しないことに注意する。

(1)



(1) 電気力線の本数から、E_0を求めると

$$E_0 = \frac{\frac{Q}{\varepsilon_0}}{S} \quad \text{（1m}^2\text{あたりの本数が電場）}$$

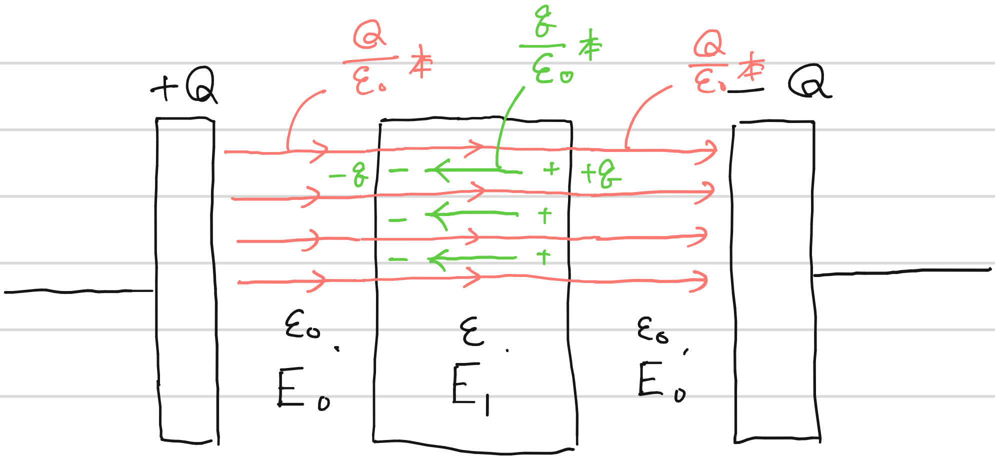
$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \;/\!/$$

(2) (1)と同様に求めると、

$$E_1 = \frac{\frac{Q}{\varepsilon}}{S}$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon S} \;/\!/$$

(3) 誘電分極により発生する電気力線を作図して考える。



→ $\left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\text{本}\right)$ と ← $\left(\frac{q}{\varepsilon_0}\text{本}\right)$ が相殺して → $\left(\frac{Q}{\varepsilon}\text{本}\right)$ になっている。

↑ 相殺した後の電場に合うようにεが定義されているので←を数えるときはε_0でよいのだ

電場に直して関係式をたてると、

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{\varepsilon_0 S} = E_1 \quad \therefore E_1 = \frac{Q-q}{\varepsilon_0 S} \;/\!/$$

$\boxed{260}$ 続き

(4) (2), (3) の答えを連立して,

$$\frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{Q-q}{\varepsilon_0 S}$$

これを

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

に合うように変形すると

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \underline{\frac{Q}{Q-q}} \quad //$$