300

ビオサバールの法則で与えられる式

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l \sin\phi}{r^2}$$

を用いる。

ここでΔBは、Δlあたりが円形導線の中心に作る磁場であり、円周全体での合計値Bを求めるには、$2\pi r$あたりを考えればよい。
また、円形導線が、中心に作る磁場を考えるとき$\phi = 90°$である。

よって

(このような比の関係 $\Delta B : \Delta l = B : 2\pi r$)

$$B = \Delta B \cdot \frac{2\pi r}{\Delta l}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l \sin 90°}{r^2}\cdot\frac{2\pi r}{\Delta l}$$

$$= \underline{\mu_0 \frac{I}{2r}}$$

※円形電流が作る磁場$H = \frac{I}{2r}$が導ける。

向きは、右ねじの法則より <u>正の向き</u>

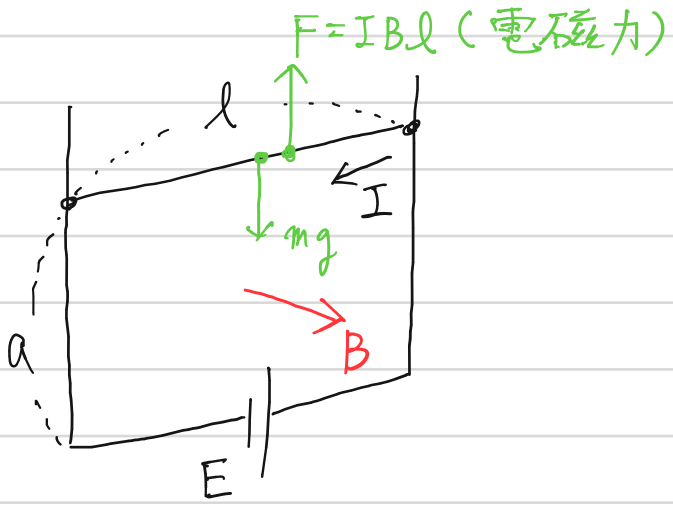
※高校範囲外なので、やらなくてOK
※解説のように「Δlあたり」を「$2\pi r$あたり」と書き直す方法の方がすっきりした立式となる。

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\sum\Delta l \sin 90°}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot 2\pi r\cdot\sin 90°}{r^2}$$

$$= \underline{\mu_0\frac{I}{2r}}$$

301



(1) 単位長さあたりの抵抗が r [Ω] と書かれているので、回路全体の抵抗Rは

$$R = (2a+2\ell)\cdot r$$
$$= 2(a+\ell)r$$

オームの法則より

$$I = \frac{V}{R}$$
$$= \frac{E}{2(a+\ell)r}$$

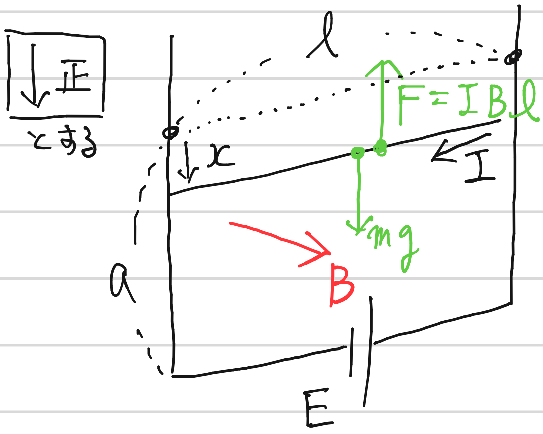
(2) 力のつりあいより

$$mg = IB\ell$$
$$\Rightarrow mg = \frac{E}{2(a+\ell)r}B\ell$$
$$\therefore a = \frac{EB\ell}{2mgr} - \ell$$

301 続き

(3) 単振動するならば、つりあいの位置から変位 x に物体があるとき、はたらく力が「$-Kx$」となっているはずである。

適当な位置 x で作図をして考える。



ここで全抵抗は

$$R=\{2l+2(a-x)\}r$$

オームの法則より

$$I=\frac{V}{R}=\frac{E}{\{2l+2(a-x)\}r}$$

よって電磁力 F の大きさは

$$F=IBl=\frac{E}{\{2l+2(a-x)\}r}\cdot Bl$$

下向きを正として合力を求めると

$$mg-\frac{E}{\{2l+2(a-x)\}r}Bl$$

$$=mg-\frac{EBl}{2(l+a-x)r}$$

$l+a \gg x$ を用いた近似の形を作る。

$$=mg-\frac{EBl}{2(l+a)\left(1-\frac{x}{l+a}\right)r}$$

$$=mg-\frac{EBl}{2(l+a)r}\left(1-\frac{x}{l+a}\right)^{-1}$$

$(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1+n\alpha$ で近似
これでやっかいな分数がきえる。

$$\fallingdotseq mg-\frac{EBl}{2(l+a)r}\left(1+\frac{x}{l+a}\right)$$

(2) のつりあいの式より

$$=mg-mg\left(1+\frac{x}{l+a}\right)$$

$\boxed{301}$ (3) 続き

$$= -\frac{mg}{l+a}x$$

$-Kx$ の形になったので単振動するといえる.

加速度を α として, 単振動の運動方程式をたてると

$$m\alpha = -\frac{mg}{l+a}x$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 x = -\frac{mg}{l+a}x$$

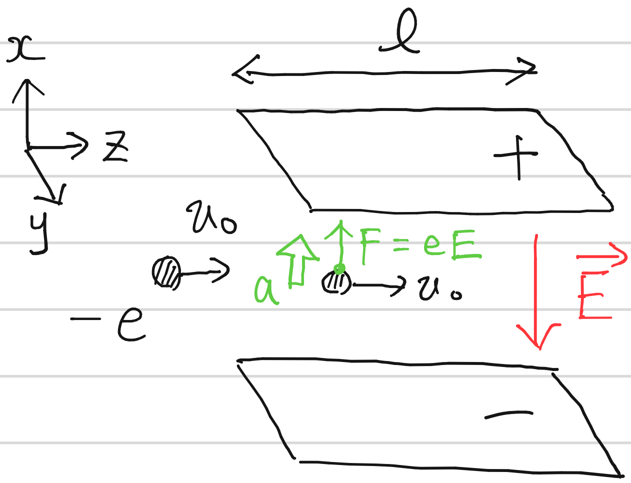
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l+a}}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ より

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l+a}}} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{l+a}{g}}}}$$

302

(1) 極板間内の運動



−の電荷なので、
電場と逆向きに力を受ける。

よって +x向きに加速。
y, z 方向は速度変化しない

(ア)

運動方程式より

$$ma = eE$$

$$\therefore a = \frac{eE}{m} \quad \text{(ア)}$$

(イ)

等加速度運動の式 $v = v_0 + at$ より、

$$v_x = 0 + \frac{eE}{m}t$$

z方向が速さ v_0 の等速運動なので通過までの時間 t は

$$t = \frac{l}{v_0}$$

これを代入して

$$v_x = 0 + \frac{eE}{m} \cdot \frac{l}{v_0}$$

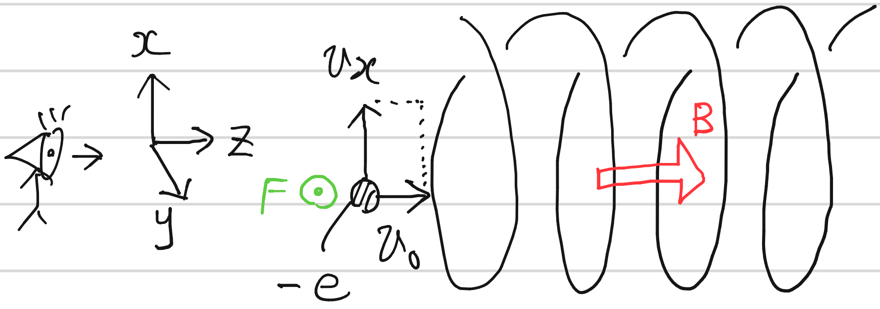
$$= \frac{eEl}{mv_0} \quad \text{(イ)}$$

(ウ)(エ)

v_y、v_z は、突入時と変わらないので $v_y = 0$ (ウ)、$v_z = v_0$ (エ)

$\boxed{302}$ 続き

(2)



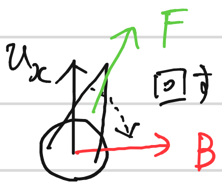
(オ)

Bに垂直な速度成分 v_x がローレンツ力に関わる。

$F = qvB$ より

$$F = ev_x B$$
$$= e \cdot \frac{eE\ell}{mv_0} \cdot B = \underline{\frac{e^2E\ell B}{mv_0}}_{//}\text{(オ)}$$

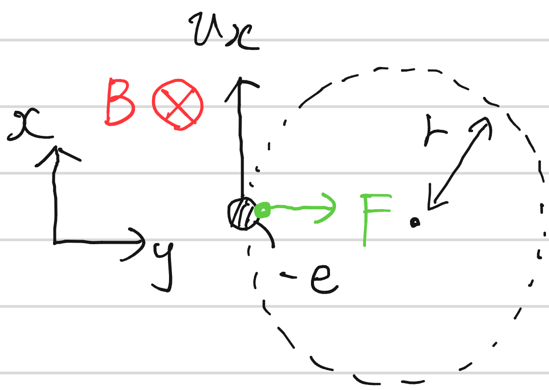
※向きは右ねじより ⊙ 向き。−の電荷なので
＋の電荷のときと逆になることに気をつける。



← このFと逆向きなので ⊙ 向き。

(カ)

上図の観測者から見た図を書くと、



このような円軌道を書ける。
円運動の運動方程式より、

$$m\frac{v_x^2}{r} = ev_xB$$

$$\Rightarrow r = \frac{mv_x}{eB} = \frac{m}{eB} \cdot \frac{eE\ell}{mv_0}$$

$$\therefore r = \underline{\frac{E\ell}{v_0B}}_{//}\text{(カ)}$$

$\boxed{302}$ 続き

(キ)

$T = \dfrac{2\pi r}{v}$ より

$$T = \frac{2\pi \cdot \dfrac{mv_x}{eB}}{v_x} \quad \left(\because\ r = \frac{mv_x}{eB}\right)$$

$$= \underline{\frac{2\pi m}{eB}} \text{ // (キ)}$$

(ク)

z 方向には v_0 で等速運動をするので

$$l = v_0 T$$

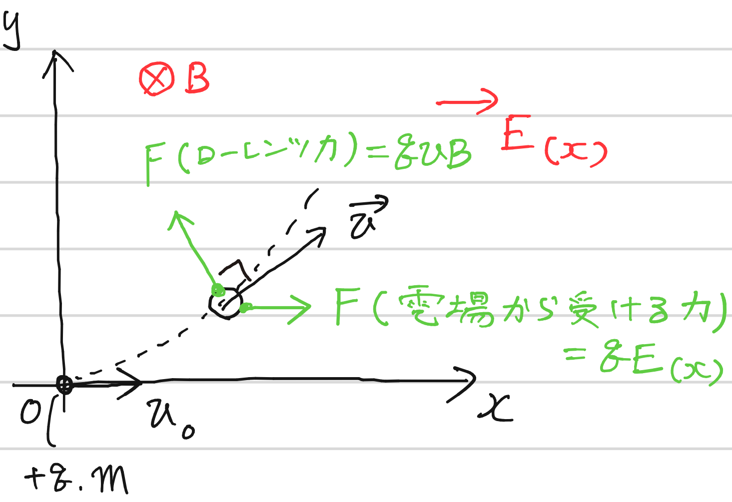
$$= v_0 \cdot \frac{2\pi m}{eB}$$

$$= \underline{\frac{2\pi m}{eB} v_0} \text{ // (ク)}$$

(ケ)

<u>らせん</u> // (ケ) 軌道 となる.

$\boxed{303}$



x方向の速度を v_0 に保つ
⇓
ローレンツ力の x成分と
つりあうように、
電場から受ける力 $qE(x)$ を
加えているのだ。

(1)

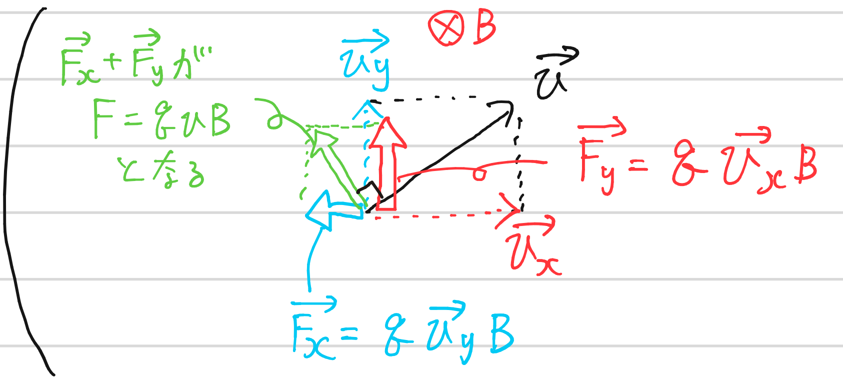
(ア) $\boxed{a_x}$

問題の設定で「v_x を一定に保つ」としているので

$$a_x = 0 \quad /\!/ (ア)$$

(イ) $\boxed{a_y}$

F(ローレンツ力) は qvB だが、その y成分は $q\vec{v_x}B$ である。



それぞれの速度成分で
ローレンツ力を書くと
こうなる。
F_y に関わるのは v_x

よって

$$F_y = qv_xB$$
$$= qv_0B$$

v_x は初速度 v_0 を保つようにしているので

y方向の運動方程式をたてて

$$m a_y = qv_0B$$

$$\therefore a_y = \frac{qv_0B}{m} \quad /\!/ (イ)$$

$\boxed{303}$ 続き

(2)

(1) の分析より

$$\begin{cases} x\text{方向は } v_0 \text{で等速運動} \\ y\text{方向は } a = \dfrac{qv_0B}{m} \text{で等加速度運動} \end{cases}$$

といえる.

(ウ) $\boxed{x}$

等速運動なので

$$\underline{x = v_0 t} \quad /\!/ \text{(ウ)}$$

(エ) $\boxed{y}$

等加速度運動なので $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$y = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{qv_0B}{m} \cdot t^2$$

$$\therefore \underline{y = \frac{qv_0B}{2m} t^2} \quad /\!/ \text{(エ)}$$

(3)

(オ) 軌道の式は y を x の関数で示したものである.

y と x の式から t を消去すればよい.

(ウ) 式より

$$t = \frac{x}{v_0}$$

(エ) 式に代入して

$$y = \frac{qv_0B}{2m} \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$$\therefore \underline{y = \frac{qB}{2mv_0} x^2} \quad /\!/ \text{(オ)}$$

$\boxed{303}$ 続き

(4)

(カ) y方向は等加速度運動なので $v = v_0 + at$ より

$$v_y = 0 + \frac{q v_0 B}{m} t$$

ここで (ハ)式より

$$t = \frac{x}{v_0}$$

なので、これを代入して

$$v_y = \frac{q v_0 B}{m} \cdot \frac{x}{v_0}$$

$$= \underline{\frac{qB}{m} x}_{\,//} \text{(カ)}$$

(5)

(キ)

ローレンツ力の x 成分 $q v_y B$ と 電場から受ける力 $qE(x)$ が

つりあっているので

$$qE(x) = q v_y B$$

$$\Rightarrow E(x) = v_y B$$

$$= \frac{qB}{m} x \cdot B$$

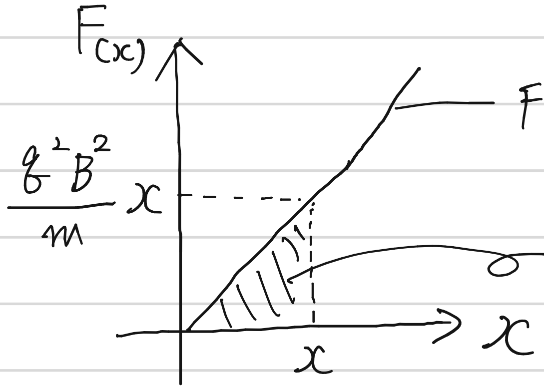
$$\therefore E(x) = \underline{\frac{qB^2}{m} x}_{\,//} \text{(キ)}$$

303 続き

(6)

(ク)

電界(電場)からされる仕事W_1は、Fが一定でないので
$W=Fx$で単純計算できず、F−xグラフの面積から求める。



$$F(x)=qE(x)=\frac{q^2B^2}{m}x$$

$$W_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2B^2}{m}x\cdot x$$
$$=\frac{q^2B^2}{2m}x^2 \quad //(ク)$$

(ケ)

磁界(磁場)から受ける力は、常に$\vec{v}$と90°なので
仕事をしない。よって
$$W_2=0 \quad //(ケ)$$

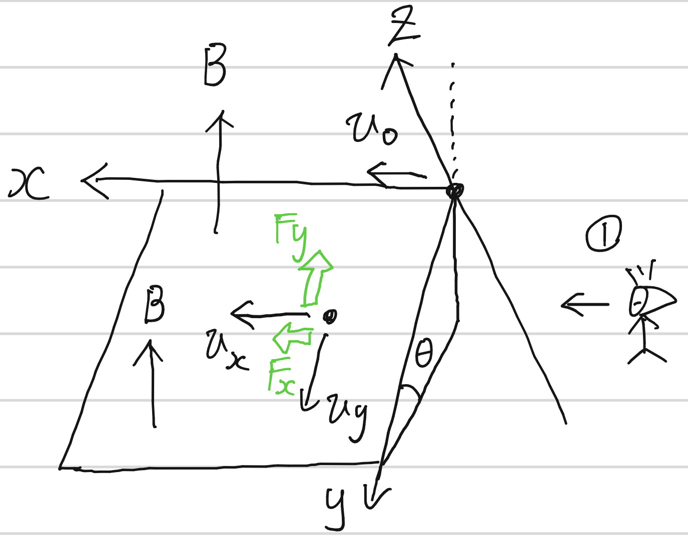
※ F_xとF_yはそれぞれ仕事をしているが、合わせると
0になっているのだ。

別解 (ク)

W_2が0であることから、W_1の分だけ運動エネルギー
が変化しているといえる。よって

$$W_1=\Delta K$$
$$=\left(\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2\right)-\frac{1}{2}mv_0^2$$
後 前
$$=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{qB}{m}x\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{q^2B^2}{2m}x^2 \quad //(ク)$$

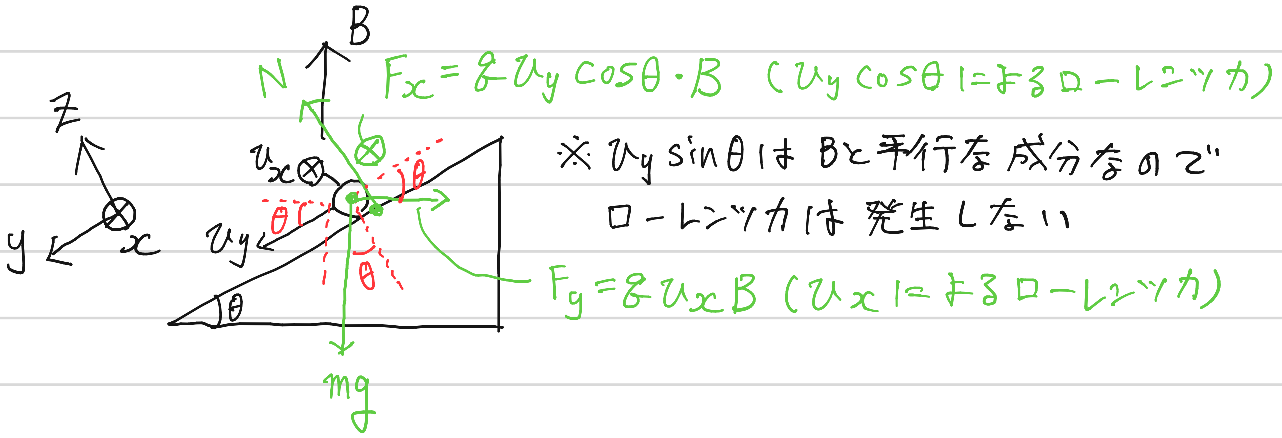
304



※ F_x は v_y によるローレンツ力
F_y は v_x によるローレンツ力.

(ア)(イ)

① 視点でローレンツ力を書いてみる.



※ $v_y \sin\theta$ は B と平行な成分なので
ローレンツ力は発生しない

x 方向の運動方程式は

$$ma_x = qv_y \cos\theta \cdot B = \underline{qv_yB\cos\theta} \quad (ア)$$

y 方向の運動方程式は

$$\underline{ma_y = mg\sin\theta - qv_xB\cos\theta} \quad (イ)$$

(z 方向はつりあう
$N = mg\cos\theta + qv_xB\sin\theta$)

※ 付属の解説では v ではなく、B を分解して、v と B を直交させています. どちらでもよいです。考えやすい方で考えましょう

$\boxed{304}$ 続き

(ウ)

$a_y = 0$ となるときのv_0を考える.

(ロ)式 $ma_y = mg\sin\theta - qv_xB\cos\theta$ より

$$0 = mg\sin\theta - qv_0B\cos\theta$$

$$\therefore v_0 = \underline{\frac{mg\sin\theta}{qB\cos\theta}}_{//} \text{(ウ)}$$

(エ)(オ)

・観測者が等速運動しているなら、観測者の加速度は0.
そうなると慣性力は0といえ、はたらく力は(ア)(イ)のときと変わらないのである.
よって $a_x' = a_x$, $a_y' = a_y$ となるのだ.

・ローレンツ力の大きさは地面から見た速度で考えるものであり、
qvBのvにv_x'やv_y'を代入するのは誤りである.

相対速度の式 $v_x' = \overset{\text{みられる}}{v_x} - \overset{\text{みる}}{v_0}$ より

$$v_x = v_x' + v_0$$

同様にv_yをv_y'で示すと. $v_y' = v_y - 0$ より

$$v_y = v_y'$$

となる

これをqvBに代入したらローレンツ力となる

⇒ (ア)式に $a_x = a_x'$, $v_y = v_y'$ を代入して

$$ma_x' = \underline{qv_y'B\cos\theta}_{//} \text{(エ)}$$

(イ)式に $a_y = a_y'$, $v_x = v_x' + v_0$ を代入して

$$ma_y' = mg\sin\theta - q(v_x' + v_0)B\cos\theta$$

$$= mg\sin\theta - q\left(v_x' + \frac{mg\sin\theta}{qB\cos\theta}\right)B\cos\theta$$

$$= \underline{-qv_x'B\cos\theta}_{//} \text{(オ)}$$

$\boxed{304}$ 続き

(カ)

説明にある『円運動する物体の運動方程式と同じ』について考える。

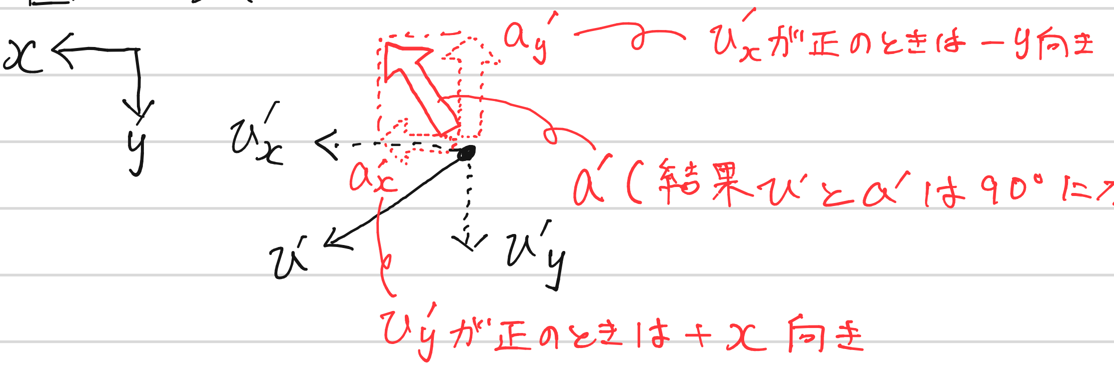
$$\begin{cases} (エ)\ m a_x' = q v_y' B\cos\theta \\ (オ)\ m a_y' = -q v_x' B\cos\theta \end{cases}$$

速度と加速度が90°

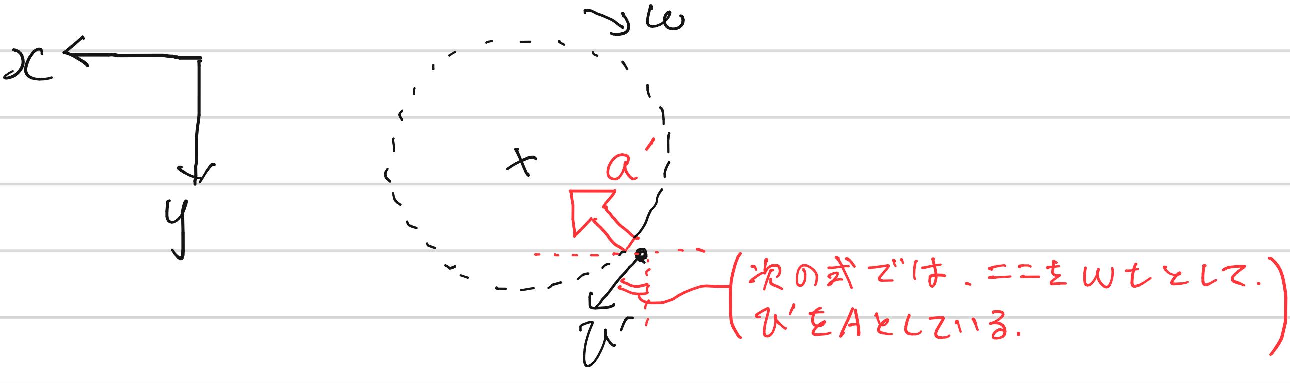
速度と加速度が90°

円運動の特徴

図で考えると



円軌道を考えると、a'の向きが円の中心向きなので下図のようにかける。



さて、$v_x' = A\sin\omega t$，$v_y' = A\cos\omega t$とすると、

a_x'とa_y'はこれらを微分して

$$a_x' = A\omega\cos\omega t \quad , \quad a_y' = -A\omega\sin\omega t$$

となり、(エ)式に代入すると、

$$m\cdot A\omega\cos\omega t = q\cdot A\cos\omega t\cdot B\cos\theta$$

$$\therefore \omega = \frac{qB\cos\theta}{m} \quad \#(カ)$$

304 続き

※(カ)補足

今回の場合、$t=0$で$v_y'=0$なので

$$v_x' = A\cos\omega t,\quad v_y' = A\sin\omega t$$

とおいた方がよいのでは？と感じる。

(キ)

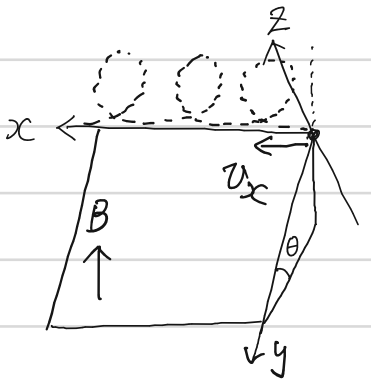
円運動の速さがv_0'、角速度がωなので、

$v=r\omega$より

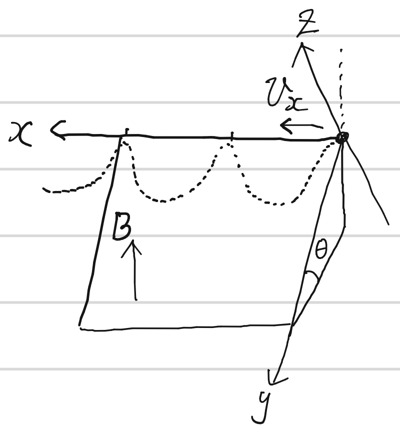
$$r=\frac{v}{\omega}=\frac{v_0'}{\frac{qB\cos\theta}{m}}$$

$$=\frac{mv_0'}{qB\cos\theta}$$ …(キ)

※実際の軌道を書いてみると

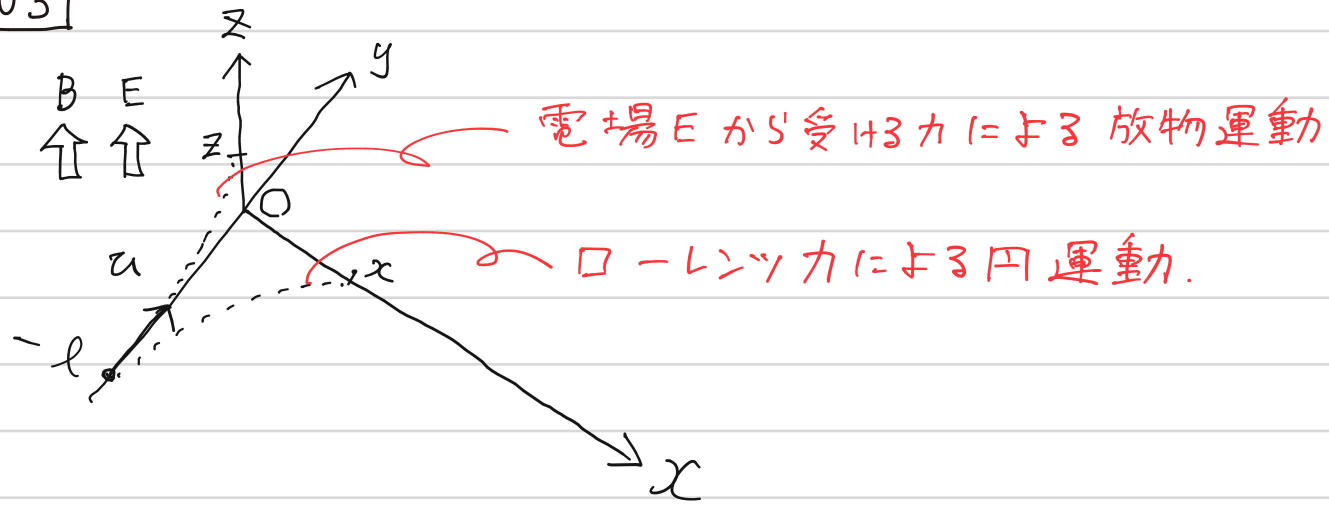


こんな感じになる。
円を描きながら、図の左へスライドしていく。



※上図は$v_x'>0$のときの軌道。
$v_x'<0$のときは円軌道の上端からスタートとなるので下図のような感じになる。
円運動の速さより、大きい速さでスライドしていくので、円の形が目に見えない。

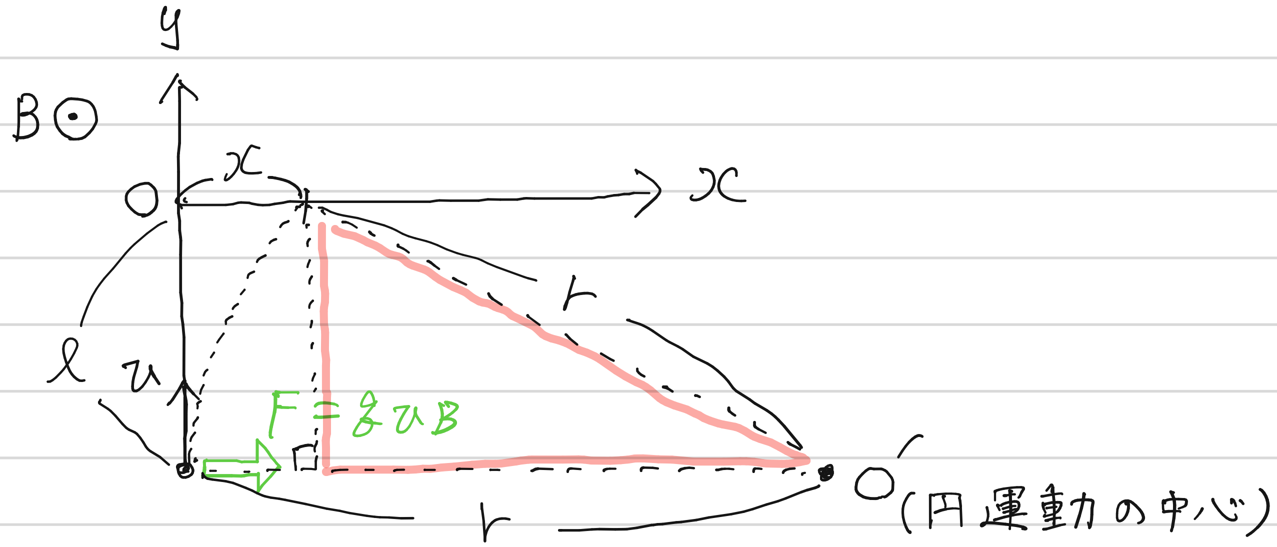
$\boxed{305}$



(ア)

$\boxed{図}$

z軸側から見た図を書くと



円運動の運動方程式より

$$m\frac{\upsilon^2}{r} = q\upsilon B \Rightarrow r = \frac{m\upsilon}{qB} \cdots ①$$

◿ で三平方の定理を立式すると.

$$r^2 = (r-x)^2 + \ell^2$$

$$\Rightarrow (r-x)^2 = r^2 - \ell^2$$

$$r - x = \sqrt{r^2-\ell^2}$$

$$x = r - \sqrt{r^2-\ell^2}$$

$$= r - r\sqrt{1-\frac{\ell^2}{r^2}}$$

305 (ア) 続き

$$= r - r\left(1 - \frac{l^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq r - r\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l^2}{r^2}\right)$$

$(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1+n\alpha$ の近似

$$\therefore x = \frac{l^2}{2r} \cdots ②$$

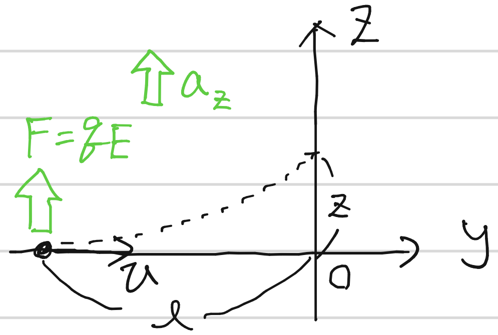
②に①を代入して

$$x = \frac{l^2}{2\frac{mv}{qB}} = \frac{qBl^2}{2mv} \quad (ア)$$

(イ)

$\boxed{z}$

x軸側から見た図を書くと.



運動方程式より

$$ma_z = qE \Rightarrow a_z = \frac{qE}{m} \cdots ③$$

$l \ll r$より円運動の円弧の長さをlと近似できるので

$$t \fallingdotseq \frac{l}{v} \cdots ④$$

z方向で $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ の立式をすると.

$$z = 0 + \frac{1}{2}at^2$$

③.④を代入して

$$z = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{qE}{m}\cdot\left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{qEl^2}{2mv^2} \quad (イ)$$

$\boxed{305}$ 続き

(ウ)

(ア) 式 $$x = \frac{qBl^2}{2mv} \cdots ⑤$$

(イ) 式 $$z = \frac{qEl^2}{2mv^2} \cdots ⑥$$

ここで z を v の関数ではなく、x の関数で示したい。→ v を消去する。

$\frac{⑥}{⑤^2}$ より

$$\frac{z}{x^2} = \frac{\frac{qEl^2}{2mv^2}}{\left(\frac{qBl^2}{2mv}\right)^2}$$

$$= \frac{2mE}{qB^2l^2}$$

$$\therefore\ z = \frac{2mE}{qB^2l^2}x^2 \quad \text{// (ウ)}$$

※ 比電荷 $\frac{q}{m}$ の大小により、放物線の形が変わるので、比電荷の測定ができるのだ。