343

(ア)

連続X線

(イ)

特性X線

(ウ)

運動エネルギー

(エ)

電子の持つ運動エネルギーがタングステンにあたるとき、どれくらいの割合で運動エネルギーが失われるかはまちまちなのである。
そして失われたエネルギーがX線となるので、様々なエネルギーのパターンのX線がでる。これが(イ)で答えた連続X線の発生原理である。

そして、X線のエネルギーは $E=h\nu$ で示される。
エネルギーが大きい程、振動数 ν が大きいX線がでるということになる。(ν が大きいと λ が小さくなる。)

電子の運動エネルギーが全て失われると、最もエネルギーの大きいX線が発生し、このときが最短波長 λ_{min} となる。
エネルギーの関係式をたてると、

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu$$

波の式 $v=f\lambda$ より $c=\nu\lambda$ なので

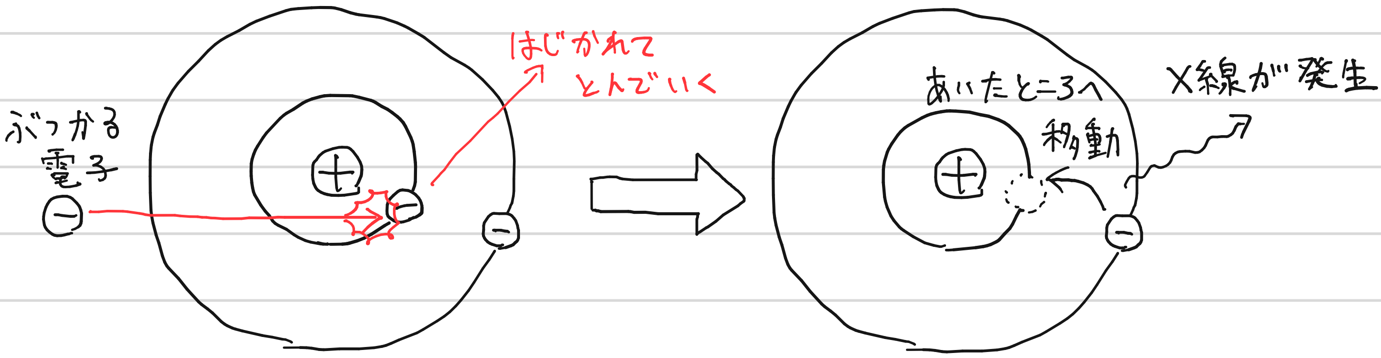
$$\frac{1}{2}mv^2 = h\cdot\frac{c}{\lambda_{min}}$$

$$\therefore \lambda_{min} = \frac{2hc}{mv^2}$$

343 続き

(オ)

(イ)で答えた特性X線は、ぶつかる電子のエネルギーがX線になるのではなく、軌道を回る電子が、軌道を移動することで発生する。



外側の方がエネルギーが高く、内側に入るとエネルギーを失うことになり、その分がX線になるのだ。

エネルギーが $E_2 \rightarrow E_1$ に変化しているので、電子が失ったエネルギーは $E_2 - E_1$ となるので、

$$E_2 - E_1 = h\nu$$

となる。

波の式 $v = f\lambda$ より $c = \nu\lambda$ と書けるので

$$E_2 - E_1 = h\frac{c}{\lambda}$$

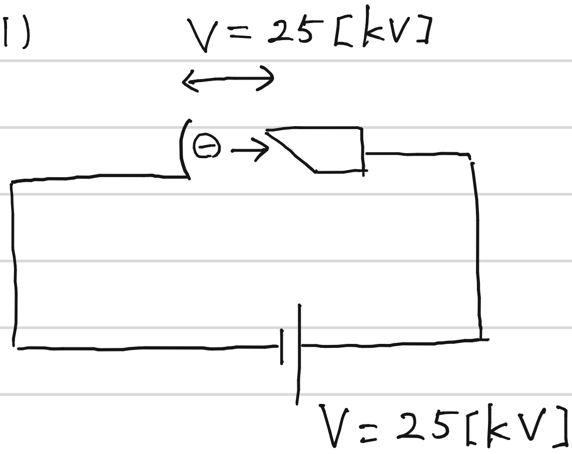
$$\therefore \lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1}$$

(カ)

暗記事項である。波長が短いほど透過力が高い。

344

(1)



かけられた電圧により電子がされる仕事Wは $W=qV$より

$$W=eV$$
$$=1.6\times10^{-19}\cdot25\times10^{3}$$
$$=\underline{4.0\times10^{-15}[J]}$$

された仕事分運動エネルギーとなるので これが答えとなる。

(2)

最短波長λ_{min}は(1)のエネルギーが全てX線になったときである。
よって

$$4.0\times10^{-15}=h\nu$$

波の式 $v=f\lambda$より $c=\nu\lambda$なので

$$4.0\times10^{-15}=h\cdot\frac{c}{\lambda_{min}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{min}=\frac{hc}{4.0\times10^{-15}}$$

$$=\frac{6.6\times10^{-34}\cdot3.0\times10^{8}}{4.0\times10^{-15}}$$

$$=4.95\times10^{-11}$$

$$\fallingdotseq \underline{5.0\times10^{-11}[m]}$$

(3)

(a) 打ち出す電子のエネルギーが大きくなるので最短波長が短くなる

$\Rightarrow$ Aは左へずれる。

R、Sは打ち出す電子のエネルギーに関係なく、ターゲットの電子軌道のエネルギーで決まるので、ターゲットが変わらないなら変わらない。$\Rightarrow$ R、Sは不変

$\boxed{344}$ 続き

(b)

電流を増やすと、飛びだす電子の数が増える.
数が増えるだけで、電子1つずつのエネルギーは変わらないので
最短波長は変わらない.

⇒ A は不変 //

ターゲットを変えていないので、R、Sも変わらない.

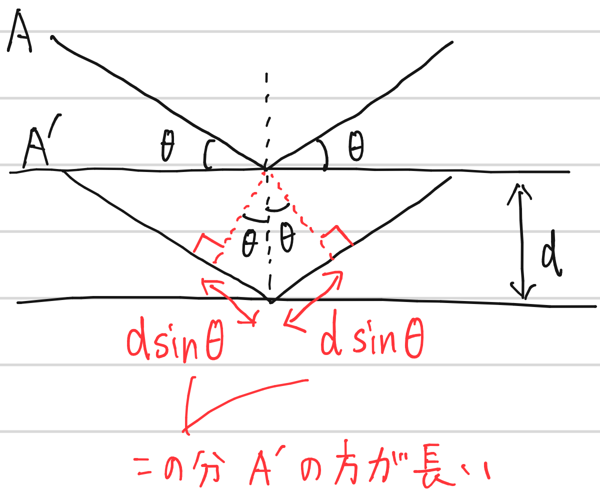
⇒ R、S は不変 //

※ 数が増えているので、X線の量(強度)は増え、
グラフは上に大きくなるといえる.

345

(ア)

AとA'の経路差を考える



経路差は $\underline{2d\sin\theta}$ // (ア)

(イ)

強め合う条件式をたてると

(経路差) = (波長の $\underline{\text{整数倍}}$) // (イ)

数式にすると

$$2d\sin\theta = m\lambda$$

(ウ)

1次の明線 $(m=1)$, $\theta = 6.0° = 2\pi \times \frac{6}{360}$ [rad], $d = 3.0\times10^{-10}$ [m] の情報を条件式に代入する。

$$2d\sin\theta = m\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2d\sin\theta}{m}$$

$$\fallingdotseq \frac{2d\theta}{m} = \frac{2\cdot3.0\times10^{-10}\cdot2\pi\times\frac{6}{360}}{1}$$

$$\fallingdotseq \underline{6.3\times10^{-11}\text{ [m]}}$$ // (ウ)

$\boxed{346}$

誘導に従って考えていこう.

(ア)

ϕ が大きくなると、$1-\cos\phi$ は大きくなっていく。($\because$ $0 \leqq \phi \leqq 90^\circ$)

よって、グラフから読みとると、ϕ が増加すると $\Delta\lambda$ も 増加 するとわかる。 //(ア)

(イ)

光子のエネルギーは $E = h\nu \xrightarrow{\nu = f\lambda \text{より}} E = \frac{hc}{\lambda}$

電子のエネルギーは $K = \frac{1}{2}mv^2$

これで計算を行うと、エネルギーの保存の式は

前　　後

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{hc}{\lambda'} \quad \cdots ①$$ //(イ)

(ウ)(エ)

光子の運動量は $p = \frac{E}{c} \xrightarrow{E = h\nu \text{より}} \frac{h\nu}{c} \xrightarrow{\nu = f\lambda \text{より}} \frac{h\frac{c}{\lambda}}{c} \rightarrow \frac{h}{\lambda}$

電子の運動量は $p = mv$

これで計算を行うと、運動量の保存の式は

前　　後

入射方向: $\frac{h}{\lambda} = mv\cos\beta + \frac{h}{\lambda'}\cos\phi \quad \cdots ②$ //(ウ)

垂直方向: $0 = mv\sin\beta - \frac{h}{\lambda'}\sin\phi \quad \cdots ③$ //(エ)

(オ)

②式を変形して

$$mv\cos\beta = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\phi \quad \cdots ②'$$ //(オ)

346 続き

(カ)

③式を変形して

$$mv\sin\beta = \underline{\frac{h}{\lambda'}\sin\phi} \quad \cdots ③'$$

// (カ)

(キ)

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して、βを消去する。

$②'^2 + ③'^2$ をすると

$$(mv\cos\beta)^2 + (mv\sin\beta)^2 = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\sin\phi\right)^2$$

$$m^2v^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2\cos\phi}{\lambda\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda'^2}(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$m^2v^2 = \underline{\frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2\cos\phi}{\lambda\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda'^2}} \quad \cdots ④$$

// (キ)

(ク)

①式 $\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{hc}{\lambda'}$ を m 倍して m^2v^2 の形を作ると

$$\frac{mhc}{\lambda} = \frac{1}{2}m^2v^2 + \frac{mhc}{\lambda'}$$

$$\Rightarrow m^2v^2 = \underline{2mhc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)}$$

// (ク)

※ これ以降の式変形も自分で追跡して

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

の結論まで導けるようになっておきたい。

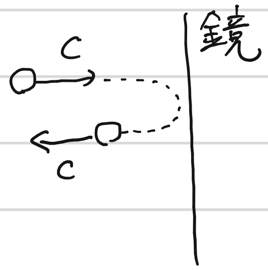
$\boxed{347}$

光子のエネルギーは $E=h\nu \rightarrow \frac{hc}{\lambda}$

光子の運動量は $p=\frac{E}{c} \longrightarrow \frac{h\nu}{c} \longrightarrow \frac{h\frac{c}{\lambda}}{c} \rightarrow \frac{h}{\lambda}$

これを利用する.

(ア)



運動量の変化は, 左向きを正とすると

$$\Delta p = p' - p$$
$$= \frac{h\nu}{c} - \left(-\frac{h\nu}{c}\right) = \underline{\frac{2h\nu}{c}}_{//} \text{(ア)}$$

(イ)

1m²あたりに1sでぶつかる光子数をNとすると
文章にある「1m²あたり1s間に与えるエネルギーがI」より.

$$I = E \cdot N$$
$$\Rightarrow N = \frac{I}{E}$$
$$= \underline{\frac{I}{h\nu}}_{//} \text{(イ)}$$

(ウ)

(ア)の運動量変化は, 光子1個が1回で鏡に与える力積と等しく, 光子はA[m²]あたりにt[s]でNAt[回]ぶつかるので

$$\frac{2h\nu}{c} \cdot NAt$$
$$\Rightarrow \frac{2h\nu}{c} \cdot \frac{I}{h\nu} At$$
$$\Rightarrow \underline{\frac{2IAt}{c}}_{//} \text{[N·s]} \text{(ウ)}$$

$\boxed{347}$ 続き

(エ)

力積の式

$$(\text{力積}) = Ft$$

より、1s あたりの力積が、力 F と等しい。よって

$$F = \frac{(\text{力積})}{t}$$

$$= \frac{\frac{2IAt}{c}}{t}$$

$$= \frac{2IA}{c} \text{ [N]}$$

// (エ)

348

エネルギー 3.0 eV の光子の持つ運動量 p を考えると.

$$p = \frac{E}{c} \quad \text{より}$$

$$p = \frac{3.0 \cdot 1.6\times10^{-19}}{c}$$ (← [eV] を [J] に直している)

これと同じ運動量を持つ電子の速さを v とすると

$$mv = \frac{3.0 \cdot 1.6\times10^{-19}}{c}$$

両辺を2乗して、$\frac{1}{2m}$ をかけると.左辺が運動エネルギーの形になるので

$$\frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{3.0\cdot1.6\times10^{-19}}{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{3.0\cdot1.6\times10^{-19}}{c}\right)^2$$

m. c の値を代入して

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2\cdot9.1\times10^{-31}}\left(\frac{3.0\cdot1.6\times10^{-19}}{3.0\times10^{8}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{18.2\times10^{-31}}(1.6\times10^{-27})^2$$

$$= 0.140\cdots\times10^{-23}$$

$$\fallingdotseq \underline{1.4\times10^{-24}\ [\mathrm{J}]}$$

[J] から [eV] に直すと.

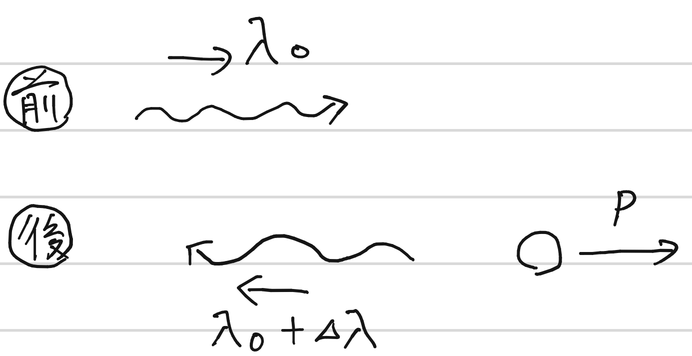
$$\left(= \frac{1}{2\cdot9.1\times10^{-31}}\left(\frac{3.0\cdot1.6\times10^{-19}}{3.0\times10^{8}}\right)^2\times\frac{1}{1.6\times10^{-19}}\ [\mathrm{eV}]\right.$$

$$= \frac{1}{18.2\times10^{-31}}\cdot1.6\times10^{-35}$$

$$= 0.0879\cdots\times10^{-4}$$

$$\left.\fallingdotseq \underline{8.8\times10^{-6}\ [\mathrm{eV}]}\right)$$

$\boxed{349}$



エネルギーを失ってるので、波長は長くなる．と考えられるようになっておこう．

運動量の保存より

$$\frac{h}{\lambda_0} = -\frac{h}{\lambda_0+\Delta\lambda} + P \quad \left(\because (\text{光子の運動量}) = \frac{h}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow P = h\left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0+\Delta\lambda}\right)$$

問題文で示されている近似式

$$\frac{1}{1+x} \fallingdotseq 1-x$$

$(1+x)^{-1} \fallingdotseq 1+(-1)x$ という近似をしている

を使える形に変形して．近似する．

$$P = \frac{h}{\lambda_0}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}}\right)$$

ここが x

$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \ll 1\right)$

$$\fallingdotseq \frac{h}{\lambda_0}\left\{1 + \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)\right\}$$

$$= \frac{h}{\lambda_0}\left(2 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)$$

$$= \frac{2h}{\lambda_0} - h\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

$\Delta\lambda \ll \lambda_0$ なので $\frac{\lambda}{\lambda_0^2} \fallingdotseq 0$ と近似

$$\fallingdotseq \underline{\frac{2h}{\lambda_0}}_{//}$$

$\boxed{350}$

（原子の持つエネルギーの減少量）＝（でてくる光子のエネルギー）
という式は、光子を含んだ際のエネルギーの保存の式といえる。

$$E_2 - E_1 = h\nu$$

$$\Rightarrow \underbrace{E_2}_{\text{前}} = \underbrace{E_1 + h\nu}_{\text{後}}$$

これを使って考えてみる.

図1より E_2, E_1, ν_0 の関係式を作っておくと

$$E_2 - E_1 = h\nu_0 \quad \cdots ①$$

図2においては、運動量保存と、エネルギーの保存の式がたてられる。

$\boxed{\text{運動量の保存}}$

$$Mv = Mv' + \frac{h\nu'}{c} \quad \cdots ②$$

$\boxed{\text{エネルギーの保存}}$

$$\underbrace{E_2 + \frac{1}{2}Mv^2}_{\text{前}} = \underbrace{E_1 + \frac{1}{2}Mv'^2 + h\nu'}_{\text{後}} \quad \cdots ③$$

②より

$$v' = v - \frac{h\nu'}{Mc} \quad \cdots ②'$$

①、②′を用いて③式から v', E_1, E_2 を消去する.

$$E_2 + \frac{1}{2}Mv^2 = E_1 + \frac{1}{2}Mv'^2 + h\nu'$$

$$\Rightarrow (E_2 - E_1) = \frac{1}{2}M(v'^2 - v^2) + h\nu'$$

①より

$$\Rightarrow h\nu_0 = \frac{1}{2}M(v'^2 - v^2) + h\nu'$$

350 続き

$$\Rightarrow h\nu_0 = \frac{1}{2}M(v'+v)(v'-v) + h\nu'$$

$$\Rightarrow h\nu' = h\nu_0 - \frac{1}{2}M(v'+v)(v'-v)$$

②より

$$\Rightarrow h\nu' = h\nu_0 - \frac{1}{2}M(v'+v)\left(v-\frac{h\nu'}{Mc}-v\right)$$

$$= h\nu_0 - \frac{1}{2}M(v'+v)\left(-\frac{h\nu'}{Mc}\right)$$

ここで

$v'-v \ll v$ という条件より，近似式 $\frac{v'+v}{2} \fallingdotseq v$ が成り立ち

$$h\nu' \fallingdotseq h\nu_0 - \frac{1}{2}M\cdot 2v\left(-\frac{h\nu'}{Mc}\right)$$

$$= h\nu_0 + Mv\left(\frac{h\nu'}{Mc}\right)$$

$$= h\nu_0 + \frac{vh\nu'}{c}$$

$$\Rightarrow \nu'\left(1-\frac{v}{c}\right) = \nu_0$$

$$\therefore \nu' = \frac{\nu_0}{1-\frac{v}{c}} = \underline{\frac{c}{c-v}\nu_0}_{\,/\!/}$$