368

(ア)(イ)

質量数 A … 重い粒（陽子と中性子）の総数.
原子番号 Z … 原子核の電荷を示す。つまり陽子の数.

よって 陽子の数は $\underline{Z}$ // (ア)

陽子と中性子の数を合わせた数が A なので
中性子の数は $\underline{A-Z}$ // (イ)

(ウ)

$${}^{A}_{Z}X \xrightarrow[\text{加えて分離}]{\text{エネルギー}B\text{を}} \begin{array}{l} \text{陽子} \\ p \times Z\,(\text{個}) \\ n \times (A-Z)\,(\text{個}) \\ \text{中性子} \end{array}$$

$$\text{質量} \quad \underset{\text{小}}{M} \xrightarrow{\Delta M\ \text{増加}} \underset{\text{大}}{m_p \times Z + m_n \times (A-Z)}$$

$\Rightarrow \Delta M = \{m_p Z + m_n(A-Z)\} - M$ といえる.
この ΔM を質量欠損という.

ここで アインシュタインの式 $E = mc^2$ より

$$B = \Delta M c^2 \quad \cdots ①$$

$$= [\{m_p Z + m_n(A-Z)\} - M]\, c^2$$

$$= \underline{\{m_p Z + m_n(A-Z)\} c^2 - Mc^2} \ // \ (\text{ウ})$$

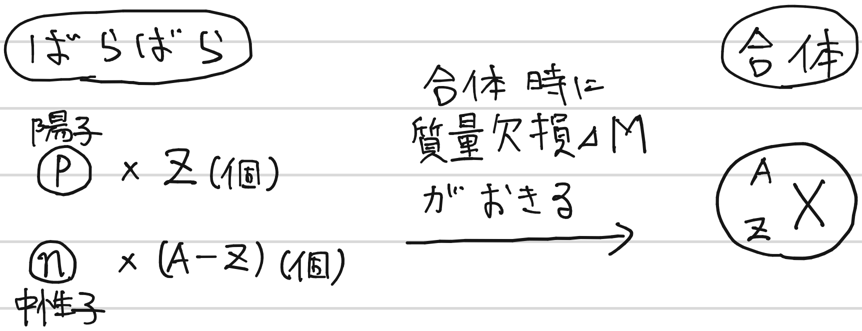
(エ)

① 式を変形して

$$\Delta M = \underline{\frac{B}{c^2}} \ // \ (\text{エ})$$

$\boxed{368}$ 補足

この問題のように「エネルギー B を加えてばらばらにする」というよりも、
「結合することで質量欠損がおきて B がでる」という風に
考えた方がイメージしやすい。(問題 $\boxed{370}$ と関連)



ここで欠損した ΔM がエネルギーとして放出され、その大きさを
結合エネルギー B と呼び

$$B = \Delta M c^2$$

となる。

核子1個あたりがたくさんエネルギーを放出して合体した方が
持っているエネルギーが小さくなる。つまり安定するので、
「核子1個あたりの結合エネルギーが大きいほど安定」といえる。

369

${}^{12}_{6}C$の質量の$\frac{1}{12}$を$1u$とした。(大体 核子1個分の質量)

$1u$の正確なgやkgへの換算を考えてみる問題である。

${}^{12}_{6}C$を1mol集めたときの質量が12gなので、
1粒あたりの質量を考えると、

$$\frac{12}{N_A}\ [g]$$

これの$\frac{1}{12}$を$1u$とするので

$$1[u] = \frac{1}{12}\cdot\frac{12}{N_A}$$
$$= \frac{1}{N_A}\ [g]$$
$$= \frac{1}{6.02\times10^{23}}\ [g] = 1.66\times10^{-24}\ [g]$$ となる。

本題に入る。

$1u$の質量エネルギー$E(=mc^2)$を考えると

$$E = 1.66\times10^{-24}\times10^{-3}\ [kg]\cdot\left(3.00\times10^{8}\ [m/s]\right)^2$$
$$= 14.94\times10^{-11}\ [J]$$
$$\fallingdotseq \underline{1.49\times10^{-10}\ [J]}$$
$$= 1.49\times10^{-10}\times\frac{1}{1.60\times10^{-13}}\ [MeV]$$
$$= 0.9312\cdots\times10^{3}$$
$$\fallingdotseq \underline{9.31\times10^{2}\ [MeV]}$$

370

ばらばら　　　　　　　　　　合体

陽子

p ×2　　　$\xrightarrow{\text{質量欠損}\Delta m}$　　^4_2He

(質量1.0073u×2)　　　　　　　(質量 4.0015u)

中性子

n ×2

(質量1.0087u×2)

(ア)

ばらばら時の質量の総和は

$$1.0073\times2+1.0087\times2$$

$$=\underline{4.0320\,[u]}\text{//}\ (ア)$$

(イ)

質量欠損は

$$4.0320-4.0015$$

$$=\underline{0.0305\,[u]}\text{//}\ (イ)$$

(ウ)

$1\,[u]=1.66\times10^{-27}\,[kg]$であることに注意して、質量欠損をエネルギーに換算すると、

$$E=\Delta mc^2$$

$$=0.0305\cdot1.66\times10^{-27}\cdot(3.00\times10^{8})^2$$

$$=0.4556\times10^{-11}$$

$$\fallingdotseq\underline{4.56\times10^{-12}\,[J]}\text{//}\ (ウ)$$

(エ)

質量欠損が大きいほど、合体でエネルギーを放出しており、<u>安定である</u>//

(エ)

371

エネルギーの大きさを $E=\dfrac{M_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ で計算をする.

$|v| \ll c$ であれば $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2 \ll 1$ といえ.

$(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1+n\alpha$ の近似式が使える.

$$E=\frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{M_0c^2}{\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\fallingdotseq \frac{M_0c^2}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$=M_0c^2\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{-1}$$

$$\fallingdotseq M_0c^2\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}$$

$$=\underbrace{M_0c^2}_{\text{質量エネルギー}}+\underbrace{\frac{1}{2}M_0v^2}_{\text{運動エネルギー}}$$

日常的な運動での速度は $v \ll c$ なので
運動エネルギーを $\frac{1}{2}mv^2$ で計算してよいのだ。

$v \ll c$ といえないような速度のときは
近似ができないので、元の E の式でエネルギーを
計算することになる。

372

①式は質量欠損によるエネルギーの式といえる.

$$Q = \{(M_A + M_B) - (M_C + M_D)\} \cdot c^2 \quad \cdots ①$$

次式は静止(質量)エネルギーと運動エネルギーを合わせたエネルギー保存則である。

$$(M_A c^2 + K_A) + (M_B c^2 + K_B) = (M_C c^2 + K_C) + (M_D c^2 + K_D) \quad \cdots (※)$$

(ア)

(※)式を変形して.

$$\{(M_A + M_B) - (M_C + M_D)\} c^2 = (K_C + K_D) - (K_A + K_B)$$

①式を代入して

$$Q = \underline{(K_C + K_D) - (K_A + K_B)}_{\#} \ (ア)$$

これは質量欠損分のエネルギー分, 運動エネルギーが増加することを示している.

(イ)

結合エネルギーBでこれを示す。

$$B_A = [\underbrace{\{Z_A m_p + (A_A - Z_A) m_n\}}_{\text{ばらばら時の質量}} - \underbrace{M_A}_{\text{合体後の質量}}] c^2$$

$$\Rightarrow M_A c^2 = \{Z_A m_p + (A_A - Z_A) m_n\} c^2 - B_A \quad \cdots ②$$

同様に

$$M_B c^2 = \{Z_B m_p + (A_B - Z_B) m_n\} c^2 - B_B \quad \cdots ③$$

$$M_C c^2 = \{Z_C m_p + (A_C - Z_C) m_n\} c^2 - B_C \quad \cdots ④$$

$$M_D c^2 = \{Z_D m_p + (A_D - Z_D) m_n\} c^2 - B_D \quad \cdots ⑤$$

①式に②.③.④.⑤を代入して

$$Q = (② + ③) - (④ + ⑤)$$

$$= [(Z_A + Z_B) m_p + \{(A_A - Z_A) + (A_B - Z_B)\} m_n] c^2 - B_A - B_B$$

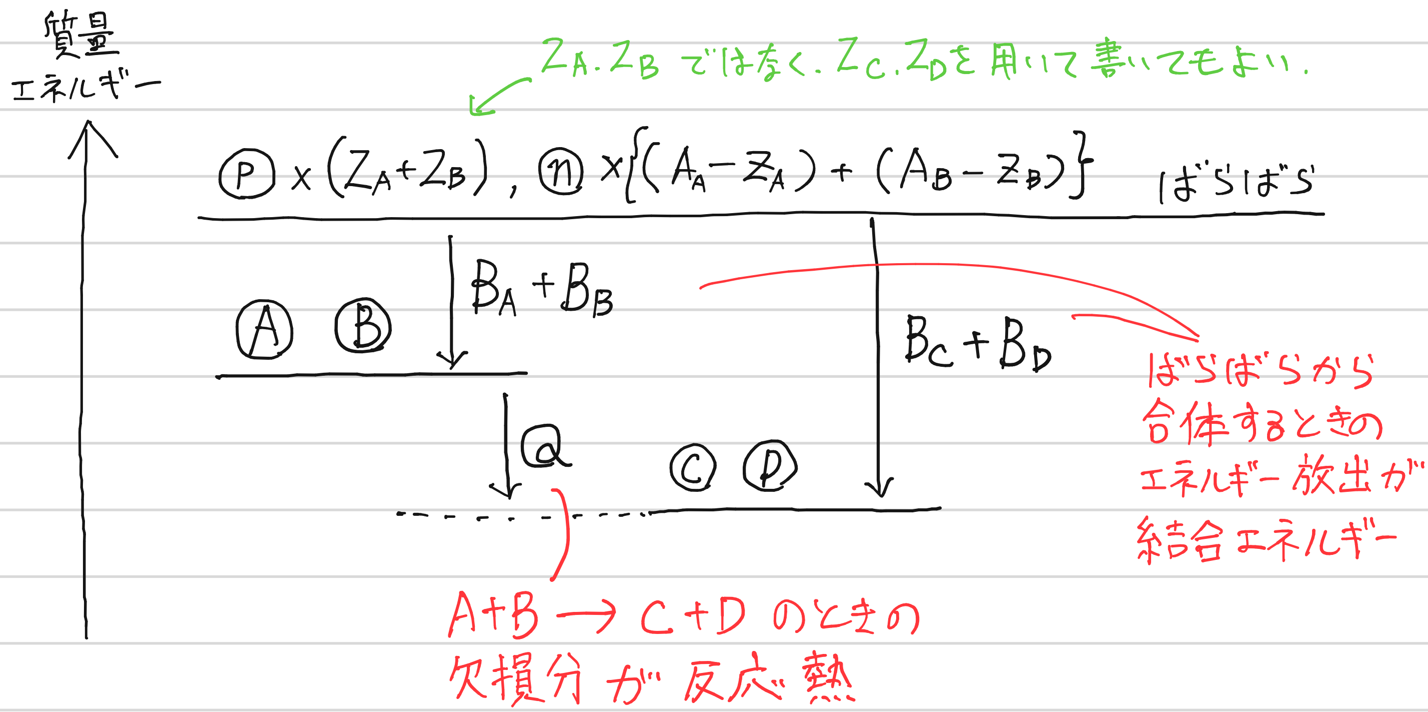
$$- ([(Z_C + Z_D) m_p + \{(A_C - Z_C) + (A_D - Z_D)\} m_n] c^2 - B_C - B_D)$$

それぞれ等しいので消去できる。

$$= \underline{(B_C + B_D) - (B_A + B_B)}_{\#} \ (イ)$$

372 補足

エネルギー図を用いると結合エネルギーをイメージしやすい



このように整理できるので

$$Q=(B_C+B_D)-(B_A+B_B)$$

と書ける。

373

前　　　　　　　　　　後

α粒子

${}^{4}_{2}He$ → 　${}^{9}_{4}Be$　　　　${}^{12}C$ → 　${}^{1}n$ →

$E = 5.3$ [MeV]　　　　E_c　　E_n

質量 $4.0026u + 9.0122u = 13.0148$　　　質量 $12.0000u + 1.0087u = 13.0087u$

質量欠損 $\Delta M = 0.0061u$

質量欠損によるエネルギーが運動エネルギーとしてプラスされていることに注意して関係式をたてる。
(質量欠損分が燃料となって加速するイメージ)

$$5.3 + \Delta M c^2 = E_c + E_n$$

↓

問題文より, 1u あたり 931 MeV なので
0.0061u あたりは $931 \cdot 0.0061$ MeV

⇓

$$E_c + E_n = 5.3 + 931 \cdot 0.0061$$
$$= 10.97\cdots$$
$$= 11.0 \text{ [MeV]}$$

※付属の解説では, 質量欠損分のエネルギーに着目するのではなく,
静止エネルギー(質量エネルギー)を含めたエネルギー保存の式をたてている.
質量を He… M_α, Be… M_{Be}　C… M_c　n… M_n とおいて.

$$(M_\alpha c^2 + E_\alpha) + (M_{Be} c^2) = (M_c c^2 + E_c) + (M_n c^2 + E_n)$$
$$\Rightarrow E_c + E_n = E_\alpha + \{(M_\alpha + M_{Be}) - (M_c + M_n)\} c^2$$
$$= E_\alpha + \Delta M c^2$$
$$\fallingdotseq \underline{11.0 \text{ [MeV]}}$$

374

(1)

表にある値は、「核子1個あたり」の結合エネルギーである。
ただの「結合エネルギー」とはちがうので、きちんと区別しよう。
例えば ^2_1H の場合，核子1個あたりの結合エネルギーが 1.1MeV で
核子が2個なので、結合エネルギーは 1.1×2 で 2.2MeV となる。

本題に入る.

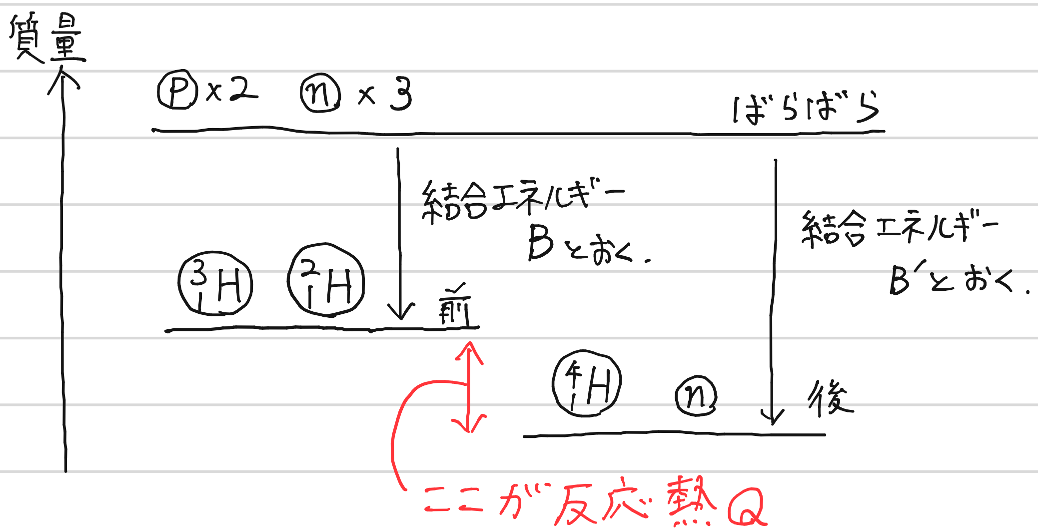
(ア)

核反応式を書くと

$$^3_1H + ^2_1H \longrightarrow ^4_2He + \underline{^1_0n}_{//} \text{(ア)}$$

(イ)

エネルギー表を書いて整理しよう



エネルギー表より

$$Q = B' - B$$

表の値を用いてB′とBを計算して，Qを求める

$$Q = \underbrace{\overset{B'}{(7.1\times4)}}_{^4_2H\text{の結合エネ}} - \{\underbrace{(2.7\times3)}_{^3_1H\text{の結合エネ}} \overset{B}{+} \underbrace{(1.1\times2)}_{^2_1H\text{の結合エネ}}\}$$

$$= 18.1 \fallingdotseq \underline{1.8\times10\ [\mathrm{MeV}]}_{//} \text{(イ)}$$

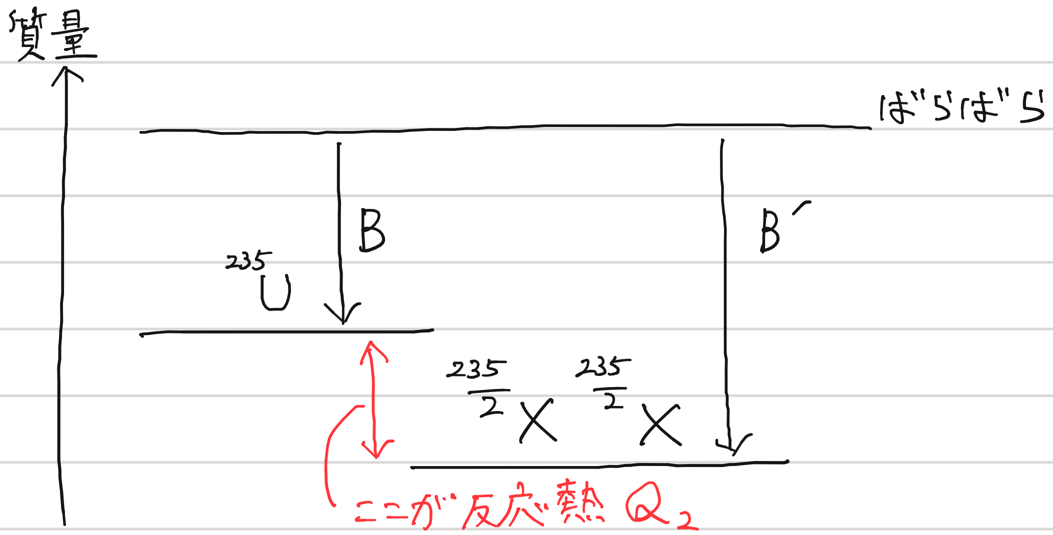
$\boxed{374}$ 続き

(2)

核反応式をかくと.

$$^{235}U \longrightarrow {}^{\frac{235}{2}}X + {}^{\frac{235}{2}}X$$

エネルギー表をかくと



$$Q_2 = B' - B$$

$$= \overbrace{\underbrace{\left(8.5\times\frac{235}{2}\right)}_{\frac{235}{2}X\text{の結合エネ}}}^{B'}\times\underbrace{2}_{2\text{個}} - \overbrace{\underbrace{(7.6\times235)}_{^{235}U\text{の結合エネ}}}^{B}$$

$$= 211.5$$

答えは $\underline{200\,\text{MeV}}$ //

375

(ア)

核融合

(イ)

$p({}^1_1H) \times 4 \longrightarrow {}^4_2He$

と書いても中性子の数が合わない.
反応はもう少し細かくおきていて、その反応はPPチェインと呼ばれる.

※ PPチェイン(覚える必要はない)

$$\left\{\begin{array}{l} p+p \longrightarrow {}^2H + e^+ + \nu \\ \Rightarrow {}^2H + p \longrightarrow {}^3He + \gamma \end{array}\right\}$$
これを2回行い ^3Heが2個できる.
⇒6個 p を使っている

$\Rightarrow {}^3He + {}^3He \longrightarrow {}^4He + 2p$
⇒2個 p が余る.

(e^+やνやγは素粒子)

結果4個の p を使って ^4He を作っている

細かい反応行程は省略して、最初と最後の状態だけで考える。

$p({}^1_1H)$の質量をm_p. ${}^4_2He$の質量をm_αとおくと

$$\Delta M = 4m_p - m_\alpha$$

となるので生じる熱量Qは

$$\begin{aligned} Q &= (4m_p - m_\alpha)c^2 \\ &= (4\times 1.67\times 10^{-27} - 6.64\times 10^{-27})\cdot(3.00\times 10^8)^2 \\ &= 0.36\times 10^{-11} \ [J] \\ &= 0.36\times 10^{-11}\cdot\frac{1}{1.6\times 10^{-19}}\times\frac{1}{10^6} \ [MeV] \\ &= 0.225\times 10^2 \\ &= 22.5 \\ &\fallingdotseq \underline{23 \ [MeV]} \end{aligned}$$
// (イ)

$\boxed{376}$

^{235}U は 1mol あたり 235g といえる。

毎時 0.36g 消費していることから、1s あたりの消費量は、

$$\frac{0.36}{60\times60} = 1.0\times10^{-4}\ [g]$$

1.0×10^{-4}[g] が何 mol か計算すると、

$$1.0\times10^{-4}\times\frac{1}{235}\ [mol]$$

1mol あたり 6.0×10^{23} 個なので、これを個数に直すと、

$$1.0\times10^{-4}\times\frac{1}{235}\times6.0\times10^{23}\ [個]$$

1個あたりから放出されるエネルギーが 2.0×10^{8}eV なので
1s あたりに放出されるエネルギーは

$$1.0\times10^{-4}\times\frac{1}{235}\times6.0\times10^{23}\times2.0\times10^{8}\ [eV]$$

このうち 20% を発電に使えるので

$$1.0\times10^{-4}\times\frac{1}{235}\times6.0\times10^{23}\times2.0\times10^{8}\times0.20\ [eV]$$

[eV] を [J] に直すと

$$1.0\times10^{-4}\times\frac{1}{235}\times6.0\times10^{23}\times2.0\times10^{8}\times0.20\times1.6\times10^{-19}\ [J]$$

$$= 0.0163\cdots\times10^{8}\ [J]$$

これが 1s あたりに発電される量なので

$$0.0163\cdots\times10^{8}\ [J/s]$$

$$\Rightarrow 0.0163\cdots\times10^{8}\ [W]$$

$$\Rightarrow 0.0163\cdots\times10^{8}\times10^{-3}\ [kW]$$

$$\fallingdotseq \underline{1.6\times10^{3}\ [kW]}_{//}$$

377

陽子や中性子をさらに分解すると、
アップクォーク(u)とダウンクォーク(d)の2種の素粒子で構成されている

(ア)(イ)

陽子は+1eの電荷を持っていることから、uとdの数を推定できる

+1にするには　$\underline{u}_{(ア)}$が2個($+\frac{2}{3}e\times2$)
$\underline{d}_{(イ)}$が1個($-\frac{1}{3}e\times1$)
合計+1e

※中性子は電荷が0であることから、

±0にするには　uが1個($+\frac{2}{3}e\times1$)
dが2個($-\frac{1}{3}e\times2$
合計±0

(ウ)

$\underline{\text{レプトン}}_{(ウ)}$

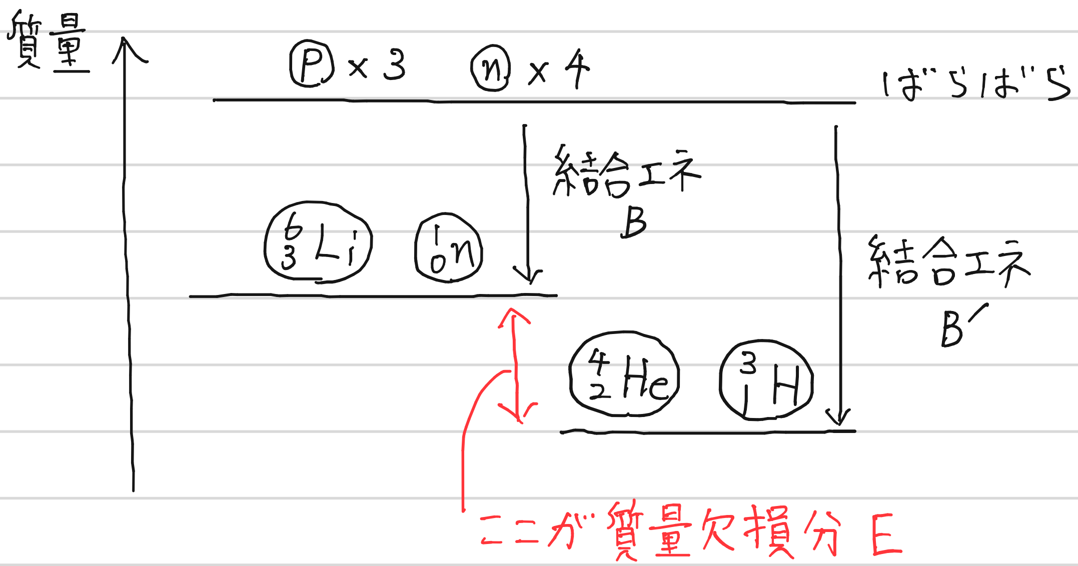
(エ)

$\underline{\text{ゲージ}}_{(エ)}$

378

(1)

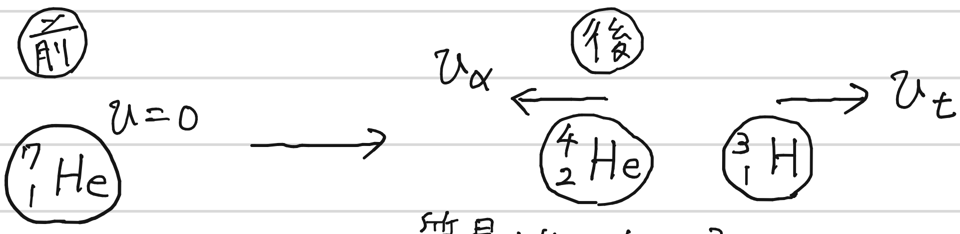
質量欠損分がエネルギーになると考える。



$$E = B' - B$$
$$= (28.3 + 8.5) - (32.0)$$
$$= \underline{4.8\ [\mathrm{MeV}]}$$

(2)

運動量保存とエネルギーの式を連立して解く.



質量比 4 : 3
(4m と 3m とする)

運動量の保存より

$$0 = -4m v_\alpha + 3m v_t$$

$$\therefore \frac{v_t}{v_\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{4:3}$$

378 続き

(3)

質量欠損分のエネルギーが燃料となって加速しているイメージで

$$\text{前} + \text{加速} = \text{後}$$

$$0 + 4.8 = K_t + K_\alpha \quad \cdots ①$$

ここで K_t と K_α は

$$K_t = \frac{1}{2}\cdot 3m\cdot v_t^2 \quad , \quad K_\alpha = \frac{1}{2}\cdot 4m\cdot v_\alpha^2$$

(2) より

$$v_\alpha = \frac{3}{4}v_t$$

なので K_α に代入して

$$K_\alpha = \frac{1}{2}\cdot 4m\cdot\left(\frac{3}{4}v_t\right)^2$$

よって K_t と K_α の比は

$$\frac{K_t}{K_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot v_t^2}{\frac{1}{2}\cdot 4m\cdot\left(\frac{3}{4}v_t\right)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \quad (\Rightarrow 4:3)$$

$\Rightarrow K_\alpha = \frac{3}{4}K_t$ といえる

① 式に代入して

$$4.8 = K_t + \frac{3}{4}K_t$$

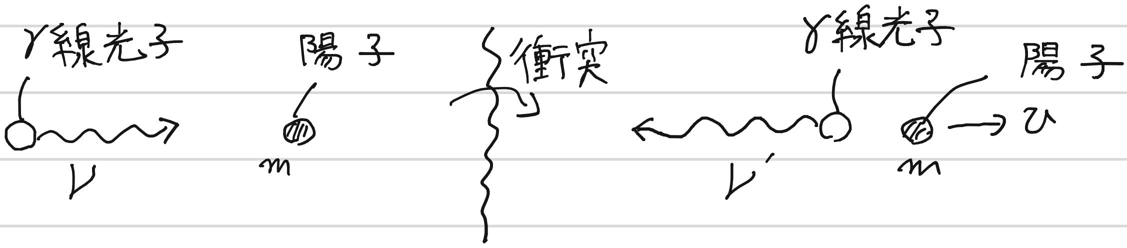
$$K_t = \frac{4}{7}\cdot 4.8$$

$$= 2.74\cdots$$

$$= \underline{2.7\,[\mathrm{MeV}]}$$

※ 付属の解説と計算手順がちがってしまいました。
やりやすい方法で計算しましょう。

$\boxed{379}$



(ア)

光子の運動量は

$$p = \frac{E}{c} \text{ より } p = \frac{h\nu}{c}$$

これを用いて 運動量保存の式をたてると

$$\frac{h\nu}{c} = \underline{-\frac{h\nu'}{c} + mv} \quad \cdots ①$$

(ア)

(イ)

系全体のエネルギー保存より

$$h\nu = \underline{h\nu' + \frac{1}{2}mv^2} \cdots ②$$

(イ)

(ウ)

陽子の質量は約1u

$\frac{1}{2}mv^2 (= E_p) = 5.6\,[\mathrm{MeV}]$ と $mc^2 = 931\,[\mathrm{MeV}]$を利用して

$h\nu$を求めることを考える。

①より

$$h\nu = -h\nu' + mvc \cdots ①'$$

①'+②でν'を消去すると

$$2h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + mvc$$

$$\Rightarrow h\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mvc\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \sqrt{m^2v^2c^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \sqrt{\frac{1}{2}mv^2 \cdot 2 \cdot mc^2}\right)$$

電卓で計算

$$= \frac{1}{2}\left(5.6 + \sqrt{5.6 \cdot 2 \cdot 931}\right) = 53.8\cdots \fallingdotseq \underline{54\,[\mathrm{MeV}]}$$

(ウ)

380

(ア)

ドップラー効果の公式 $f' = \dfrac{ひ \pm ひ_0}{ひ \pm ひ_s} f_0$ より

$$\nu' = \frac{c + ひ}{c} \nu \quad // (ア)$$

(イ)

吸収する光子の振動数は何でもいいわけではなく、
とびとびのエネルギー準位の差のエネルギーを持つ光子である必要がある。
今回はその光子の振動数が ν_0 であると与えられている。

$\nu' = \nu_0$ であればよいので

$$\nu_0 = \frac{c + ひ}{c} \nu$$

$$\therefore \nu = \frac{c}{c + ひ} \nu_0 \quad // (イ)$$

(ウ)(エ)

光子の運動量が x 軸負の向きなので、
受ける力積は x 軸負 // (ウ) で、原子は遅くなる // (エ)

(オ)

$\nu = \dfrac{c}{c + ひ} \nu_0$ の光子をあてる必要があり、段々とひが小さくなっていくことから、あてる光子の振動数 ν は
しだいに増加させ (オ) なければならない。

$\boxed{380}$ 続き

(カ)

1個の光子につき $\frac{h\nu_0}{c}$ の運動量が減少することから.

運動量 Mv の原子が静止するのに必要な個数は,

$$\frac{Mv}{\frac{h\nu_0}{c}} \Rightarrow \frac{Mvc}{h\nu_0} \text{個}$$

$$= \frac{8\times10^{-26}\cdot 3.3\times10^{2}\cdot 3\times10^{8}}{6.6\times10^{-34}\cdot 1\times10^{15}}$$

$$= 12\times10^{3}$$

$$\fallingdotseq \underline{1\times10^{4}\ [\text{個}]} \text{ (カ)}$$

(キ)

光子1個あたり $h\nu_0$ [J] のエネルギーを持っているので

$$h\nu_0 \times \frac{Mvc}{h\nu_0}$$

$$= Mvc$$

$$= 8\times10^{-26}\cdot 3.3\times10^{2}\cdot 3\times10^{8}$$

$$= 79.2\times10^{-16}$$

$$\fallingdotseq \underline{8\times10^{-15}\ [\text{J}]} \text{ (キ)}$$

380 続き

(ク)

はじめの振動数 ν はドップラー効果を加味して ν_0 になっているので

$$\nu_0 = \frac{c+v}{c}\nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{c+v}\nu_0$$

最後の振動数 ν' は、原子が静止しているので
ドップラー効果なしで ν_0 となっているので

$$\nu' = \nu_0$$

差をとって

$$\begin{aligned}
\nu' - \nu &= \nu_0 - \frac{c}{c+v}\nu_0 \\
&= \left(1 - \frac{c}{c+v}\right)\nu_0 \\
&= \left(1 - \frac{1}{1+\frac{v}{c}}\right)\nu_0 \\
&\fallingdotseq \left\{1 - \left(1 - \frac{v}{c}\right)\right\}\nu_0 \\
&= \frac{v}{c}\nu_0 \\
&= \frac{3.3\times10^2}{3\times10^8}\cdot 1\times10^{15} \\
&= 1.1\times10^9 \\
&\fallingdotseq \underline{1\times10^9\ [\mathrm{Hz}]}
\end{aligned}$$

(ク)

381

(1)

光子のエネルギーEは

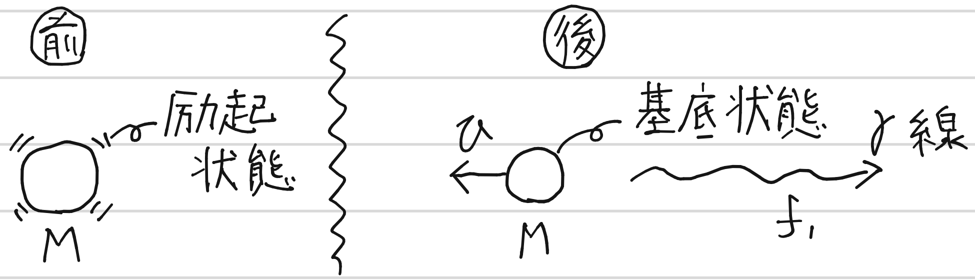
$$E = h\nu$$
$$= hf_0$$

これがエネルギー準位の差Eと等しいので

$$E = hf_0$$

$$\therefore f_0 = \frac{E}{h}$$

(2)



運動量の保存より

$$0 = -Mv + \frac{hf_1}{c} \quad \cdots ①$$

光子の運動量は
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

エネルギー保存より

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + hf_1 \quad \cdots ②$$

エネルギー準位の差分が光子のみでなく、運動エネルギーにもなっているイメージ

①より $v = \dfrac{hf_1}{Mc}$，これを②に代入して

$$E = \frac{1}{2}M\left(\frac{hf_1}{Mc}\right)^2 + hf_1$$

$$0 = \frac{h^2}{2Mc^2}f_1^2 + hf_1 - E$$

$$0 = h^2f_1^2 + 2Mc^2hf_1 - 2Mc^2E$$

2次関数の解の公式より，

$$f_1 = \frac{-2Mc^2h \pm \sqrt{(2Mc^2h)^2 - 4\cdot h^2(-2Mc^2E)}}{2h^2}$$

$\boxed{381}$ (2) 続き

$$f_1 = \frac{-2Mc^2h \pm \sqrt{4M^2c^4h^2 + 8Mc^2Eh^2}}{2h^2}$$

$$f_1 = \frac{-Mc^2 \pm \sqrt{M^2c^4 + 2Mc^2E}}{h}$$

$f_1 > 0$ なので

$$f_1 = \frac{-Mc^2 + \sqrt{M^2c^4 + 2Mc^2E}}{h}$$

$$= \frac{-Mc^2 + Mc^2\sqrt{1 + \frac{2E}{Mc^2}}}{h}$$

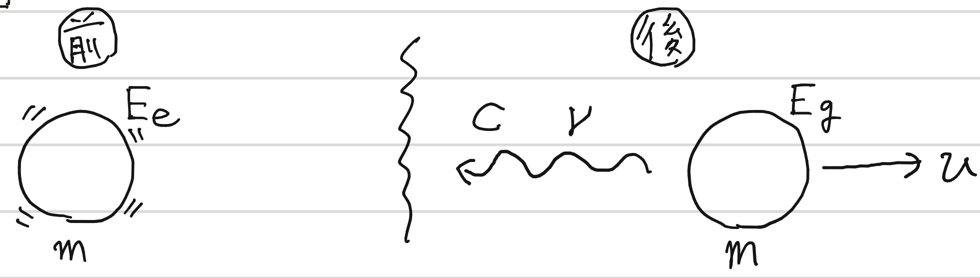
いつもより細かい近似となる。

$$\fallingdotseq \frac{-Mc^2 + Mc^2\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2E}{Mc^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2E}{Mc^2}\right)^2\right\}}{h}$$

$$= \frac{E - \frac{E^2}{2Mc^2}}{h}$$

$$= \underline{\frac{E}{h}\left(1 - \frac{E}{2Mc^2}\right)}_{//}$$

382



(ア)

エネルギーの保存より

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 + h\nu \quad \text{(ア)}$$

エネルギー準位の差が光子と運動エネルギーになったイメージ

(イ)

運動量の保存より

$$0 = -\frac{h\nu}{c} + mv$$

$$\therefore\ mv = \frac{h\nu}{c} \quad \text{(イ)}$$

(ウ)

(イ)の式より

$$v = \frac{h\nu}{mc}$$

これを(イ)に代入して

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\left(\frac{h\nu}{mc}\right)^2 + h\nu$$

$$= \frac{h^2}{2mc^2}\nu^2 + h\nu$$

$$\Rightarrow\ 0 = \frac{h^2}{2mc^2}\nu^2 + h\nu - \Delta E$$

$$\Rightarrow\ 0 = \nu^2 + \frac{2mc^2}{h}\nu - \frac{2mc^2\Delta E}{h^2}$$

2次関数の解の公式より

$$\nu = \frac{-\frac{2mc^2}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{2mc^2}{h}\right)^2 - 4\left(-\frac{2mc^2\Delta E}{h^2}\right)}}{2}$$

382 (ウ) 続き

$$= -\frac{mc^2}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{mc^2}{h}\right)^2 + \frac{2mc^2\Delta E}{h^2}}$$

$\nu > 0$ なので

$$\nu = -\frac{mc^2}{h} + \sqrt{\left(\frac{mc^2}{h}\right)^2 + \frac{2mc^2\Delta E}{h^2}}$$

$$= -\frac{mc^2}{h} + \frac{mc^2}{h}\sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{mc^2}}$$

$$= -\frac{mc^2}{h}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{mc^2}}\right)$$

$\Delta E \ll mc^2$ であるから近似式を用いて

$$\nu \fallingdotseq -\frac{mc^2}{h}\left[1 - \left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\Delta E}{mc^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2\Delta E}{mc^2}\right)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{mc^2}{h}\left(\frac{\Delta E}{mc^2} - \frac{\Delta E^2}{2(mc^2)^2}\right)$$

$$= \frac{\Delta E}{h}\left(1 - \frac{\Delta E}{2mc^2}\right) \quad \text{// (ウ)}$$

(エ)

(ウ) で $m \to \infty$ とすると

$$\nu_\infty = \frac{\Delta E}{h} \quad \text{// (エ)}$$

(オ)

ドップラー効果で吸収体が吸収する光子の振動数 ν' は、

$$\nu' = \frac{c - V}{c}\nu$$

これが ν_∞ となるので

$$\nu_\infty = \frac{c - V}{c}\nu$$

$$\therefore \frac{\nu_\infty}{\nu} = \frac{c - V}{c} \quad \text{// (オ)}$$

$\boxed{382}$ 続き

(カ)

(エ)式より　(ウ)式より

$V = A\omega\cos\omega t_1$, $\nu_0 = \frac{\Delta E}{h}$. $\nu = \frac{\Delta E}{h}\left(1-\frac{\Delta E}{2mc^2}\right)$ を

(オ)式に代入して

$$\frac{\frac{\Delta E}{h}}{\frac{\Delta E}{h}\left(1-\frac{\Delta E}{2mc^2}\right)} = \frac{c-A\omega\cos\omega t_1}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{c-A\omega\cos\omega t_1}{c} = \frac{1}{1-\frac{\Delta E}{2mc^2}}$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{\Delta E}{2mc^2}$$

$$\Rightarrow \frac{A\omega\cos\omega t_1}{c} = -\frac{\Delta E}{2mc^2}$$

$$\therefore \cos\omega t_1 = -\frac{\Delta E}{2A\omega mc} \quad \text{(カ)}$$

383

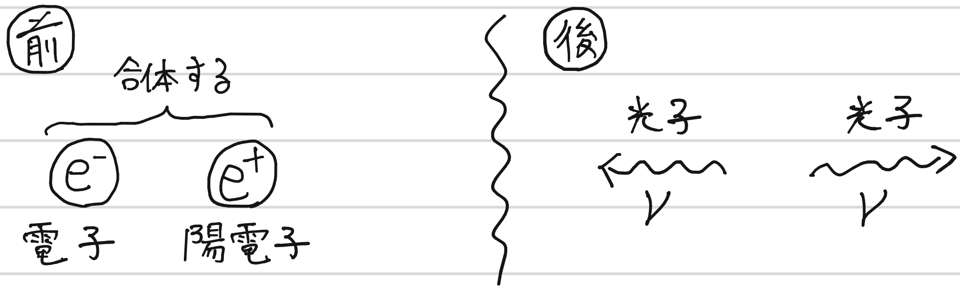
特殊相対性理論によると

$$E = Mc^2 + \frac{p^2}{2M} = Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

と表される。

(1)

(a)



運動量の保存より後の運動量の和は、前と同じ0にならないといけない。よって後の向きは正反対の向き // となる。

(b)

前後でエネルギーは等しい(保存する)。//

(c)

エネルギーの保存より

$$\underbrace{(mc^2+0)}_{e^-\text{のE}} + \underbrace{(mc^2+0)}_{e^+\text{のE}} = \underbrace{h\nu + h\nu}_{2\text{個の光子}}$$

$$\Rightarrow 2mc^2 = 2h\nu$$

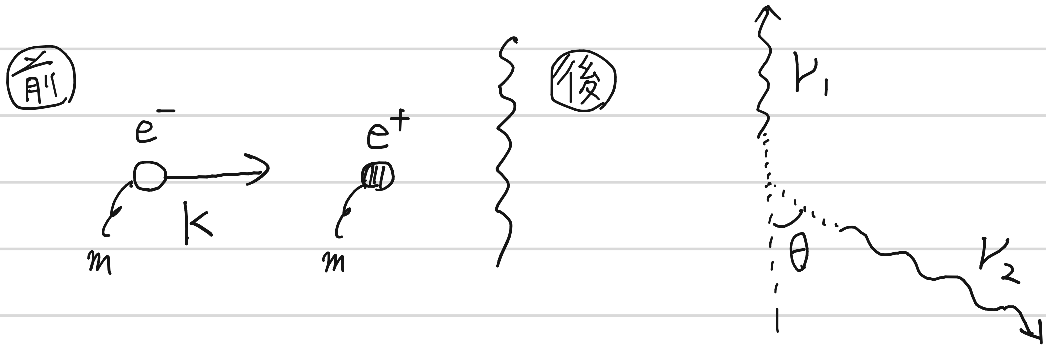
$$\therefore h\nu = mc^2 \ [\mathrm{J}]$$

$$= \frac{mc^2}{e} \ [\mathrm{eV}]$$

$$= \frac{mc^2}{e} \times 10^{-6} \ [\mathrm{MeV}]$$ //

383 続き

(2)



(a)

運動エネルギー K が $K=\frac{1}{2}mv^2$ なので
運動量 mv は $\sqrt{2mK}$ と計算できる。

水平方向の運動量保存より.

$$\underline{\sqrt{2mK} = \frac{h\nu_2}{c}\sin\theta}$$

鉛直方向の運動量保存より

$$\underline{0 = \frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c}\cos\theta}$$

(2)

与えられたエネルギーの式を用いて計算して

$$\underbrace{\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)}_{e^-\text{のE}} + \underbrace{\left(mc^2 + 0\right)}_{e^+\text{のE}} = h\nu_1 + h\nu_2$$

$$\Rightarrow \underline{2mc^2 + K = h\nu_1 + h\nu_2}$$